Quadrupelung und Paarung im Schalenmodell

I N A U G U R A L D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung der Doktorwürde
der
Freien Universität Berlin
Fachbereich Physik

Vorgelegt von

Giselher Schalow
aus Berlin

- Februar 1973 -

Quadrupelung und Paarung im Schalenmodell

I N A U G U R A L D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung der Doktorwürde
der
Freien Universität Berlin
Fachbereich Physik

Vorgelegt von

Giselher Schalow
aus Berlin

- Februar 1973 -

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Gutachter.	Prof. Dr. J. Eichler
2. Gutachter.	Priv.-Doz. Dr. D. H. E. Groß
Tag der Promotion:	12. März 1973

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	1
1. Einleitung	2
2. Das Quadrupelungs- und Paarungs-Klassifikationsschema	5
3. Vergleich der Quartett- und Quadrupel-Kopplungsschemata für eine Schale mit J=O und T=O	9
3.1. Quartettenergie E_Q	10
3.2. Quadrupelenergie E_q	11
3.2a n-,T-projizierte Neutron-Proton-BCS-Energie	11
3.3. Vergleich der Energien der Quartett- und Quadrupel-Kopplungsschemata	13
3.4. Mischung der Quartett- und Quadrupel-Zustände	15
3.5. Ergebnisse und Diskussion	17
4. Diagonalisation eines allgemeinen Hamiltonoperators (drehinvariant und ladungsunabhängig) im Zweischalenmodell	21
4.1. Nichtdiagonalmatrixelement	21
4.2. Diagonalmatrixelement	22
4.3. Ergebnisse und Diskussion	24
5. n- und T-projizierte Neutron-Proton-BCS-Näherung für mehrere Schalen mit T_z=O	29
5.1. Grundzustandsnäherung	30
5.2. Energie des Hamiltonoperators zwischen n- und T-projizierten BCS-Zuständen	30
5.3. Ergebnisse und Diskussion	31

	Seite
Schlußbetrachtung	33
Anhang A	35
Anhang B	42
Anhang C	44
Literaturverzeichnis	45

Zusammenfassung

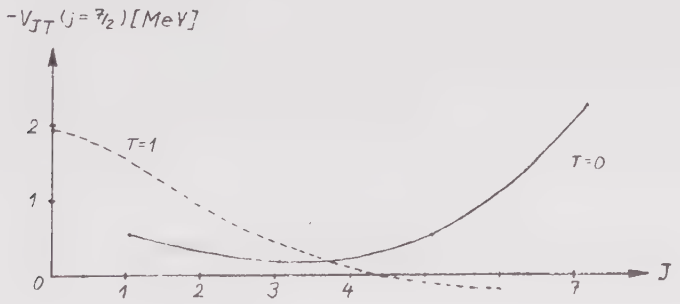
Im Klassifikationsschema[1], in dem die Basiszustände explizit nach der Zahl der Quadrupel (System von zwei Paaren mit J=0 und T=1 gekoppelt zu T=0) und der Zahl der T=1-Paare in jeder Schale klassifiziert sind, wird für ein System von n_p Protonen und n_n Neutronen (n_p=n_n=gerade) ein rotationsinvarianter und ladungsunabhängiger Hamiltonoperator in zwei nichtentarteten j-Schalen diagonalisiert. Die Berechnungen zeigen, daß die Nukleonen im wesentlichen Quadrupel bilden und daß die n- und T-projizierte Neutron-Proton-BCS-Lösung eine sehr gute Näherung des Grundzustandes für einen Paar-Hamiltonoperator und eine gute Näherung für den allgemeineren rotationsinvarianten und ladungsunabhängigen Hamiltonoperator ist. Für eine Schale wird der Unterschied zwischen den beiden Vierteilchenkopplungsschemata (J=0, T=1 Paare gekoppelt zu T=0[1] und $J=J_{max}$, T=0 Paare projiziert auf J=0[2]) geklärt.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547615_0013

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit versucht, eine einfache Näherung für ein Neutronen-Protonen-System (leichte Kerne mit $n_p=n_n$=gerade) zu konstruieren. In solchen Systemen bewegen sich Protonen und Neutronen in gleichen Schalenmodellbahnen. Daraus folgt, daß es notwendig wird, Proton-Neutron-Paarung zusätzlich zur Proton-Proton- und Neutron-Neutron-Paarung zu behandeln. Zwei Protonen oder zwei Neutronen haben maximale Bindungsenergie (als eine Folge des maximalen Überlapps ihrer Wellenfunktionen in den Winkelkoordinaten), wenn sie zu J=0 und T=1 gekoppelt sind. Ein Proton und ein Neutron haben ebenfalls eine große Bindungsenergie (großen Überlapp), wenn sie zu $J=J_{max}$ und T=0 gekoppelt sind[4]. Diese Eigenschaft der Zweiteilchenbindungsenergien kann auch einfach erkannt werden, wenn man sich die gekoppelten Zweiteilchenmatrixelemente in Figur 1 ansieht, wo die Matrixelemente mit $J=J_{max}$, T=0 und J=0, T=1 die größten sind.



Figur 1

Gekoppelte Zweiteilchenmatrixelemente für $j=7/2$
(berechnet mit Kuo-Brown-Wechselwirkung mit ^{40}Ca-Core[5])
Sie veranschaulichen, daß die Kopplungen J=0, T=1 und $J=J_{max}$, T=0 stark bevorzugt sind.

Viele experimentelle Fakten, wie z.B. die Bindungsenergiesystematik oder die Separationsenergien von α-Teilchen und einzelnen Nukleonen, deuten auf die Wichtigkeit eines neuen Bausteins in Kernen hin, nämlich eine Untereinheit, in welcher

zwei Protonen und zwei Neutronen zu J=O und T=O gekoppelt sind. Diese α-ähnliche Kopplung von vier Nukleonen ist nicht eindeutig. Durch die obige Eigenschaft der Zweiteilchenbindungsenergien werden die beiden Extremfälle bevorzugt, nämlich die Kopplung von zwei Paaren mit J=O, T=1 zu J=O, T=O (Quadrupel[1]) und die Kopplung von zwei Paaren mit $J=J_{max}=2j$, T=O zu J=O, T=O (Quartett[2]).

Während kein Zweifel an der Wichtigkeit von Vierteilchenwechselwirkungen besteht, so ist es nicht klar, welcher Kopplungstyp der wichtigere ist. Es sollten beide wichtig sein, da beide zugrundeliegenden Paare von realistischen Kernreaktionen begünstigt werden. Der Vorteil des Quartettschemas liegt in der Erklärung von Deformationen, der des Quadrupelkopplungsschemas in der Konstruktion einer leicht handhabbaren und physikalisch durchsichtigen Basis. Während das Quartettschema viel behandelt wurde (siehe Ref. 2 und 2a), so wurde über das Quadrupelschema bisher wenig geschrieben. Die Vorzüge des letzteren sollen in dieser Arbeit gezeigt werden.

In Teil 2 wird das Quadrupelungs- und Paarungsschema[1] beschrieben. Diese Modellbasis ist eine explizite Darstellung des Seniority-Klassifikationsschemas mit der Seniority s=O und dem reduzierten Isospin t=O, welches ein Unterraum des allgemeinen Proton-Neutron-Klassifikationsschemas R(5) ist, das von Hecht[6] und anderen (siehe Ref. 6) eingeführt wurde. Die Wirksamkeit des Modellschemas liegt in der Tatsache, daß es sehr durchsichtig und einfach zu handhaben ist und direkte Einsicht in die physikalische Struktur bei jedem Schritt gibt.

In Teil 3 werden für eine Schale ein Quartettzustand [2] (J-projizierter "aligned"-Zustand) und ein Quadrupelzustand (T=O und n-projizierter Proton-Neutron-BCS-Zustand [14] +)) gemischt, da bisher beide Kopplungstypen nur getrennt betrachtet wurden. Bei der Rechnung ergeben sich neben der neuen Grundzustandsenergie Mischungskoeffizienten, die zeigen, wie unterschiedlich die beiden Zustände sind. Um weiterhin den Unterschied in den Kopplungen von Quartett- und Quadrupelzustand in einer Schale zu erklären, wurden die Energien nach den gekoppelten Zweiteilchenmatrixelementen V_{JT} zerlegt ($E = \sum_{JT} C_{JT} V_{JT}$) und die Wichtungsfaktoren C_{JT} in Abhängigkeit von ^{JT}J aufgetragen.

In Teil 4 wird nun für ein System von zwei nichtentarteten j-Schalen und mit $n_p = n_n$ = gerade ein rotationsinvarianter und ladungsunabhängiger Hamiltonoperator in der Modellbasis diagonalisiert. Indem man einige Eigenschaften vom Seniority-Schema und vom Modellschema und einige physikalische Einsichten vom Modellschema verwendete, war es einfach, die Diagonal- und Nichtdiagonalelemente zu berechnen. Eine Erweiterung auf mehr als zwei Schalen ist möglich.

In Teil 5 wird für das System von Teil 4 der Neutron-Proton-BCS-Zustand nach der Modellbasis entwickelt und gezeigt, daß nur der T- und n-projizierte Zustand eine gute Näherung ist. Die Energie des ladungsunabhängigen und rotationsinvarianten Hamiltonoperators zwischen T- und n-projizierten BCS-Zuständen liegt nur sehr wenig über der exakten Energie aus Teil 4. Damit bestätigt sich, daß es für eine Näherung sehr wichtig ist, die Symmetrien des Hamiltonopertors zu berücksichtigen.

+) welcher für eine Schale gleich dem Quadrupelzustand ist (siehe (3.4)).

Das Quadrupelungs- und Paarungs-Klassifikationsschema (1)

Für eine detaillierte Behandlung von Quadrupelung und Paarung ist es nützlich, alle benötigten Zustände explizit zu konstruieren. Dadurch kann man mehr physikalische Einsicht in die Struktur der Zustände erhalten, als bei einer bloßen Klassifikation nach einem Satz von Quantenzahlen.

Die elementaren Bausteine aller Zustände, die hier betrachtet werden, sind die zu J=0 und T=1 gekoppelten Teilchenpaare. Sie sind definiert durch (mit $n^+_{jm} \equiv C^+_{jm\,\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, ...)

$$\hat{P}^+_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m (-)^{j-m} n^+_{jm}\, n^+_{j-m} = \sqrt{\frac{2j+1}{2}} \sum_{m=-j}^{j} \langle jm\, j-m\,|00\rangle \langle \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\,|11\rangle C^+_{jm\,\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\, C^+_{j-m\,\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2j+1}{2}}\, A^+_{J=0\,M=0\;T=1\,T_3=+1}$$

$$\hat{P}^+_{0} = \frac{1}{2} \sum_m (-)^{j-m} (n^+_{jm} p^+_{j-m} + p^+_{jm} n^+_{j-m}) = \sqrt{\frac{2j+1}{2}} \sum_{m_t} \sum_{m=-j}^{j} \langle jm\, j-m\,|00\rangle \langle \tfrac{1}{2}m_t\, \tfrac{1}{2}-m_t\,|10\rangle C^+_{jm\,\frac{1}{2}m_t}\, C^+_{j-m\,\frac{1}{2}-m_t} \qquad (2.1)$$

$$= \sqrt{\frac{2j+1}{2}}\, A^+_{J=0\,M=0\;T=1\,T_3=0}$$

$$\hat{P}^+_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m (-)^{j-m} p^+_{jm}\, p^+_{j-m} = \sqrt{\frac{2j+1}{2}} \sum_{m=-j}^{j} \langle jm\, j-m\,|00\rangle \langle \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\,|1-1\rangle C^+_{jm\,\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\, C^+_{j-m\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2j+1}{2}}\, A^+_{J=0\,M=0\;T=1\,T_3=-1}\,,$$

wobei p^+_{jm} und n^+_{jm} Fermionoperatoren sind, welche Protonen und Neutronen mit dem Drehimpuls j und der Projektion m erzeugen. Weiterhin werden die Isospinoperatoren

$$\hat{T}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m n^+_{jm}\, p_{jm}$$

$$\hat{T}_{0} = \frac{1}{2} \sum_m (n^+_{jm}\, n_{jm} - p^+_{jm}\, p_{jm}) \qquad (2.2)$$

$$\hat{T}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m p^+_{jm}\, n_{jm}$$

und der Teilchenzahloperator

$$\hat{N}_0 = \sum_m (n^+_{jm} n_{jm} + p^+_{jm} p_{jm}) \qquad (2.3)$$

eingeführt.

Diese Operatoren zusammen mit den hermitisch Konjugierten der Paaroperatoren (2.1) bilden eine geschlossene Algebra, von der gezeigt werden kann, daß sie identisch[7] mit der Gruppe R(5) der Rotationen im fünfdimensionalen Raum[8)9)] ist.

Im Rahmen der T=1 Paarungstheorie gibt es nur eine Möglichkeit, ein Viernukleonensystem mit J=0 und T=0 zu konstruieren. Dieses Objekt wird Quadrupel[10)11)12)] genannt und ist durch den Erzeugungsoperator

$$\hat{Q}^+_0 = \sum_{K=-1}^{+1} (-)^K \hat{P}^+_K \hat{P}^+_{-K} = \hat{P}^{+2}_0 - 2\hat{P}^+_{+1}\hat{P}^+_{-1} \qquad (2.4)$$

definiert. $\hat{Q}^+_0$ erfüllt die einfache Vertauschungsrelation

$$[\hat{T}_{0,\pm 1}, \hat{Q}^+_0] = 0 \quad . \qquad (2.5)$$

Eine orthogonale Basis, charakterisiert durch die Paarzahl N, den Isospin T und seine Projektion T_0, läßt sich konstruieren, wenn man beachtet, daß die Vektorenoperatoren r_k,

$$\begin{aligned} r_{\pm 1} &= \mp \tfrac{1}{\sqrt{2}} (x \pm iy) \\ r_0 &= z \\ r^2 &= \sum_{K=-1}^{+1} (-)^K r_K r_{-K} \end{aligned} \qquad (2.6)$$

und die Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_K$,

$$\hat{L}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{L}_x \pm i \hat{L}_y)$$

$$\hat{L}_0 = \hat{L}_z \qquad (2.7)$$

$$\hat{L}^2 = \sum_{K=-1}^{1} (-)^K \hat{L}_K \hat{L}_{-K} \quad ,$$

die gleichen Vertauschungsregeln befolgen wie die Operatoren $\hat{P}_K^+$, $\hat{Q}_o^+$ und $\hat{T}_K$. Deshalb besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen den Operatoren

$$r_K \hat{=} \hat{P}_K^+$$

$$\hat{L}_K \hat{=} \hat{T}_K \qquad (2.8)$$

$$r^2 \hat{=} \hat{Q}_o^+ \quad .$$

Der orthogonale Eigenfunktionensatz von $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_o$, konstruiert von den Operatoren r_K, ist durch die "Solid Harmonics" gegeben,

$$\mathcal{Y}_{L,\pm|L_o|} = r^L Y_{L,\pm|L_o|} = \sqrt{\frac{(2L+1)!!}{4\pi\, L!}} \sqrt{\frac{2^{L-|L_o|}(L+|L_o|)!}{(2L)!(L-|L_o|)!}} (\pm \hat{L}_{\mp})^{L-|L_o|} (r_{\pm})^L \qquad (2.9)$$

Mit der Operatorenkorrespondenz (2.8) und Gleichung (2.9) kann man die mit N=T, T und T_o charakterisierten Zustände sofort hinschreiben. In dem man (2.9) mit Potenzen von r^2 multipliziert und Gleichung (2.8) benutzt,

$$(r^2)^{\frac{N-T}{2}} \mathcal{Y}_{L,\pm|L_o|} |0\rangle \hat{=} \hat{Q}_o^{+\frac{N-T}{2}} |N'=T, T\, T_o\rangle = |N, T\, T_o\rangle \quad , \quad (N = \text{Paarzahl})$$

kann man den allgemeinen Satz von orthonormalen Basiszu-

ständen angeben:

$$|N,T,\pm(T_0)\rangle = C_{NT}^{-1}\sqrt{\frac{2^{T-|T_0|}(T+|T_0|)!}{(2T)!(T-|T_0|)!}}\,(\pm\hat{T}_{+1})^{T-|T_0|}(\hat{P}^{+}_{\pm1})^{T}(\hat{Q}^{+})^{\frac{N-2T}{4}}|0\rangle \quad , \tag{2.10}$$

$$\text{mit } N-T = \text{gerade.} \tag{2.11}$$

Der Faktor C_{NT}^{-1} entsteht bei der Normierung des Quadrupeloperators und ist gegeben durch

$$C_{NT} = \sqrt{\frac{T!(\Omega+1)!(N-T)!!(N+T+1)!!}{(2T+1)!!(\Omega+1+T-N)!!(\Omega-T-N)!!}} \quad , \tag{2.12}$$

wobei $\Omega = 2j+1$ die Entartung der Schale ist.

Die Basiszustände (2.10) sind nicht nur Eigenzustände der Operatoren $\hat{N}_o$, $\hat{T}^2$ und $\hat{T}_o$, sondern auch von $\hat{Q}_o^{+}\hat{Q}_o$, dem Anzahloperator der Quadrupel,

$$\hat{Q}_o^{+}\hat{Q}_o|N,TT_o\rangle = Q_{NT}|N,TT_o\rangle \quad , \tag{2.13}$$

mit

$$Q_{NT} = (N+T+1)(N-T)(\Omega-N+T+3)(\Omega-N-T+2) \quad . \tag{2.14}$$

Der Zustand $|NTT_o\rangle$ gibt daher mit den Potenzen von $\hat{P}^{+}_{\pm1}$ und $\hat{Q}^{+}$ die vorliegende Zahl von Paaren und Quadrupeln an. Die Grenzfälle reiner Paarung und reiner Quadrupelung sind gegeben durch T=N und T=O.

Für die Berechnung von Matrixelementen, die zu der vorliegenden Algebra gehören oder für die Entwicklung der Wirkung

allgemeiner Produkte von Paaroperatoren nach den Basiszuständen (2.10), benutzt man einfacherweise die Clebsch-Gordan-Entwicklung der "Solid Harmonics",

$$Y_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_2 m_2} = \sum_{\ell m} \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi(2\ell+1)}} \langle \ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | \ell m \rangle \langle \ell_1 0 \ell_2 0 | \ell 0 \rangle r^{\ell_1+\ell_2-\ell} Y_{\ell m} , \qquad (2.15)$$

zusammen mit (2.8) und (2.9).

Als besonders einfachen Fall der Anwendung von (2.15) erhält man

$$\hat{P}^+_K | N, T T_0 \rangle = \sum_{L=T\pm1} P^{(+)}_{NTL} \langle T T_0 1K | L T_0+K \rangle | N+1, L, T_0+K \rangle , \qquad (2.16)$$

$$\text{mit } P^{(+)}_{N,T,L} = \frac{C_{N+1,L}}{C_{N,T}} \sqrt{\frac{(2L-1)!!\, T!}{(2T-1)!!\, L!}} \langle T0\,10 | L0 \rangle$$

Vergleich der Quartett- und Quadrupel-Kopplungsschemata für eine Schale mit J=0 und T=0

Der Vergleich der beiden Kopplungsschemata wird mit dem Vergleich der Energien begonnen. Die benötigten gekoppelten Zweiteilchenmatrixelemente werden erstens mit harmonischen Oszillatorwellenfunktionen und einem zentralen Gaußschen Zweiteilchenpotential der Form

$$V(1,2) = e^{-\frac{r_{12}^2}{\mu^2}} \sum_{S,T=0,1} {}^{2S+1,2T+1}A\, P_S\, P_T ,$$

$$\text{mit } r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| , \; {}^{31}A = -40\,\text{MeV} , \; {}^{13}A = {}^{11}A = -{}^{33}A = -24\,\text{MeV} , \; \mu = \text{Reichweiteparameter}, \qquad (3.0)$$

b = Oszillatorparameter, $\mu = b$, P_S und P_T = Projektionsoperatoren auf Spin und Isospin,

berechnet (auf die später mit Gillet-Wechselwirkung verwiesen wird) und zweitens von Kuo und Brown[5] (realistischere Matrixelemente) übernommen. Von den Einteilchenenergien abgesehen hat der Hamiltonoperator die folgende Form:

$$H = \sum_{i<j} V_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{ij} V_{ij} \hat{=} \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V(\alpha\beta\gamma\delta) C_\alpha^+ C_\beta^+ C_\delta C_\gamma = \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_A(\alpha\beta\gamma\delta) C_\alpha^+ C_\beta^+ C_\delta C_\gamma =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{ab}}} \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{cd}}} V_{AN}^{(\alpha\beta\gamma\delta)} C_\alpha^+ C_\beta^+ C_\delta C_\gamma = \frac{1}{4}\sum_{abcd} \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{ab}}} \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{cd}}} \sum_{JT} V_{AN}^{(abcd)} A_{JT}^{+(ab)} A_{JT}^{+(dc)}$$

mit $\alpha := a, m_{ja}$, A = antisymmetr., N = normiert. siehe Anhang C

Um den Unterschied der beiden Kopplungsschemata besser zu verstehen, werden die Quartett- und Quadrupelenergie nach den gekoppelten Zweiteilchenmatrixelementen zerlegt und die Wichtungsfaktoren verglichen.

1. Quartettenergie E_Q

Die Quartettenergie

$$E_Q = \langle Q | V(12) | Q \rangle_n \qquad (3.1)$$

wird mit dem oblaten Quartettzustand (J-projizierter oblater "aligned"-Zustand),

$$|Q(n, T=0, J=0)\rangle = P_{J=0} |A(n, T=0)\rangle = P_{J=0} (p_j^+ n_j^+ p_{-j}^+ n_{-j}^+ \cdots p_{j-\frac{n}{4}+1}^+ n_{j-\frac{n}{4}+1}^+ p_{-j+\frac{n}{4}-1}^+ n_{-j+\frac{n}{4}-1}^+) |0\rangle ,$$

der das Pauliprinzip streng berücksichtigt, berechnet [+], und in Figur 2 aufgetragen. p^+ und n^+ sind Protonen- und Neutronenerzeugungsoperatoren und $P_{J=0}$ ist der Drehimpulsprojektionsoperator.

[+] private Mitteilung von Herrn S. C. K. Nair

3.2. Quadrupelenergie E_q

Der Quadrupelzustand $|q\rangle$ (mit Paarkopplung zu J=0, T=1) ist der Zustand mit der Seniority s=0 und dem reduzierten Isospin t=0 des Seniority-Schemas. Die Energie $E_q = \langle q|V(1,2)|q\rangle$ wird von Talmi[13] (Seite 536) übernommen,

$$E_q = \langle j^n T=0 J=0 | \sum_{i<j}^{n} V_{ik} | j^n T=0 J=0 \rangle = \frac{n(n-1)}{2} \frac{(6j+5)\bar{V}_2 + (2j+1)\bar{V}_1 - 2V_0}{4(2j+1)}$$

$$- \frac{(2j+3)\bar{V}_2 - 2V_0 - (2j+1)\bar{V}_1}{2(2j+1)} \frac{3}{4} n + \frac{n}{2} \frac{2(j+1)}{2j+1} (V_0 - \bar{V}_2) \qquad (3.2)$$

mit

$$\bar{V}_2 = \sum_{\substack{J>0 \\ ger.}} (2J+1) V_J \Big/ \sum_{\substack{J>0 \\ ger.}} (2J+1) \quad , \quad \bar{V}_1 = \sum_{\substack{J \\ unger}} (2J+1) V_J \Big/ \sum_{\substack{J \\ unger}} (2J+1) \quad \text{und}$$

$V_J := \langle j^2 T J | V(1,2) | j^2 T J \rangle$, wobei T=1 für J ger. und T=0 für J unger.

und ebenfalls in Figur 2 aufgetragen.

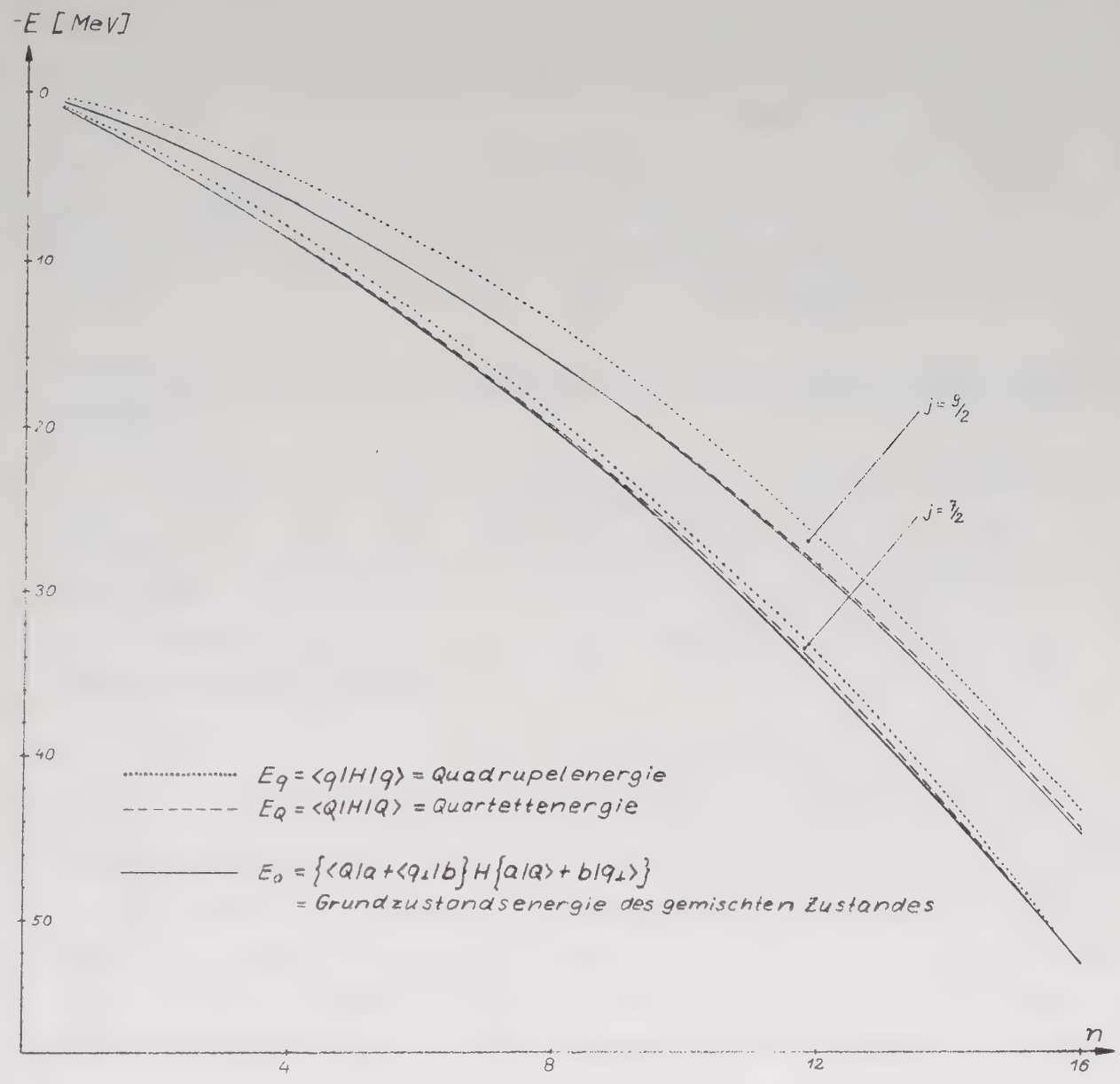
3.2a n-,T-projizierte Neutron-Proton-BCS-Energie

Für $n_n = n_p$ = gerade ist der Neutronen-Protonen-BCS-Grundzustand gegeben durch +) 14) 22):

$$|BCS\rangle = \prod_{jm} (u_j + v_j (-)^{j-m} C^{+}_{jmp} C^{+}_{j-mn}) |0\rangle \quad , \text{ mit } t_p = \tfrac{1}{2} \text{ und } t_n = -\tfrac{1}{2}$$

Die Energie des n- und T=0-projizierten BCS-Zustandes

+) siehe Anhang A, Formel (A2).



Figur 2

Abhängigkeit der Energien von der Teilchenzahl n

unter Verwendung der Kuo-Brown-Wechselwirkung mit ^{40}Ca-Core [5].
(E_q mit (3.2) oder (A.9) und E_Q mit (3.1) berechnet)

Die Quartettenergie E_Q liegt für eine Schale niedriger als die Quadrupelenergie E_q, da das Quartettkopplungsschema die größeren gekoppelten Matrixelemente V_{JT} in Formel (3.3) (siehe auch Figur 3) besser wichtet.

Die Quartettenergie nähert sich für steigende j-Schalen der Grundzustandsenergie E_0 der gemischten Zustände.

$$E_{pp} = \langle BCS | P_{n_i} V(1,2) P_{n_i} | BCS \rangle$$

ist für eine Schale gleich der exakten Energie[+] (3.2) [3].
Die allgemeine Formel für die projizierte BCS-Zustandsenergie E_{pp} ist in Anhang A, Formel (A9) gegeben.

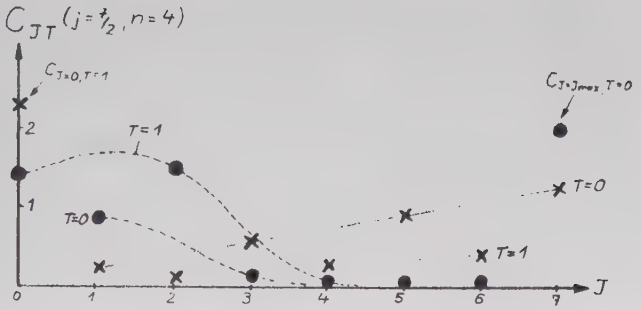
3.3. Vergleich der Energien der Quartett- und Quadrupel-Kopplungsschemata

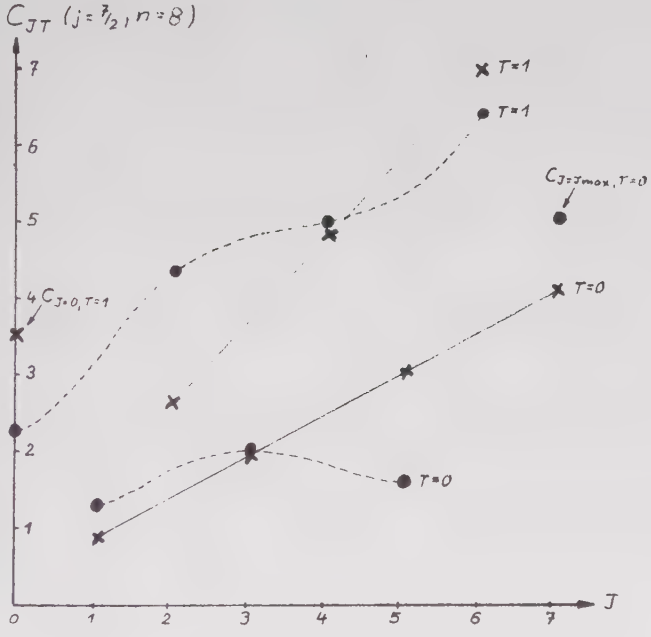
Der Vergleich der Energien zeigt, daß die Quartettenergie E_Q niedriger ist als die Quadrupelenergie (Figur 2 , die Ergebnisse der Gillet- und der Kuo-Brown-Wechselwirkung sind sehr ähnlich). Um zu verstehen, warum E_Q niedriger ist, werden die Energien nach den gekoppelten Zweiteilchenmatrixelementen zerlegt,

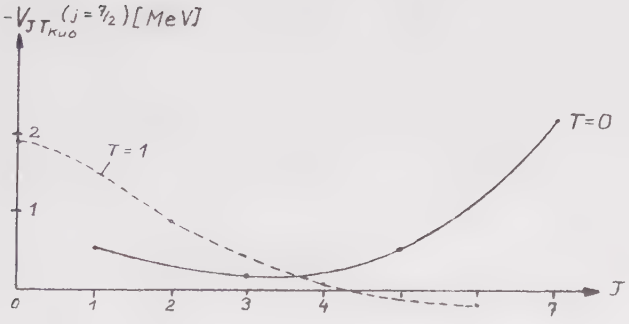
$$E_Q = \sum_{JT} C_{JT,Q} V_{JT} \quad , \quad E_q = \sum_{JT} C_{JT,q} V_{JT} \tag{3.3}$$

und die Wichtungsfaktoren C_{JT} in Abhängigkeit von J in Figur 3 aufgetragen. Aus Figur 3 ist zu ersehen, daß das Quartettkopplungsschema ($J=J_{max}$, T=0) das größte Matrixelement stärker wichtet als das Quadrupelkopplungsschema (J=0, T=1). In erster Näherung kann man die Reihenfolge der Energieniveaus richtig wiedergeben, in dem man nur $C_{J=0}$ und $C_{J=J_{max}}$ betrachtet. Beide Wichtungsfaktoren sind groß. Aber durch Wichtung eines etwas größeren Matrixelementes ist $C_{J=J_{max}} \cdot V_{J=J_{max}}$ größer als $C_{J=0} \cdot V_{J=0}$. Mit steigender Teilchenzahl wird $C_{J=J_{max}}$ sogar noch größer als $C_{J=0}$.

[+] gemeint ist die exakte Quadrupelenergie







Figur 3

Wichtungsfaktoren C_{JT} in Abhängigkeit von J. Unten zum Vergleich die gekoppelten Matrixelemente V_{JT}.

$C_{JT,Q}$ (Wichtungsfaktoren der Quartettenergie)

$C_{JT,q}$ (Wichtungsfaktoren der Quadrupelenergie)

Die Ursache dafür, daß die Quartettenergie (in Figur 2) niedriger liegt als die Quadrupelenergie, ist, daß die Quartettkopplung die größeren gekoppelten Matrixelemente V_{JT} mit den Wichtungsfaktoren C_{JT} besser wichtet.

In grober Näherung gilt:

$$|E_q| < |E_Q| \text{ , da}$$

$$C_{J=0,T=1,q} \cdot V_{J=0,T=1} < C_{J=J_{max},T=0,Q} \cdot V_{J=J_{max},T=0}$$

Die Sonderstellung von $C_{J=0,T=1q}$ und $C_{J=J_{max},T=0,Q}$ (mit Pfeil versehen) ist auch aus der Struktur der Wichtungsfaktoren in Figur 3 zu erkennen.

$V_{JT}(j) = \langle jj\,JT|V|jj\,JT\rangle$

mit $j = n, \ell, j$

und $n=0, \ell=3, j=7/2$

Die innere Struktur der Wichtungsfaktoren ist nicht so einfach zu verstehen. Auf jeden Fall sollen die Zustände der zwei Kopplungsschemata gemischt werden, um einerseits zu sehen, um wieviel niedriger die neue Grundzustandsgesamtenergie liegt und um andererseits aus den Mischungsanteilen (a, b, (a+bα) und bβ) zu sehen, wie unterschiedlich sie sind.

4. Mischung der Quartett- und Quadrupel-Zustände

Durch Mischung der normierten Zustände $|q\rangle$ und $|Q\rangle$ ($z = \langle q|Q\rangle < 1$) erhält man mit $|Q_\perp\rangle = \alpha|q\rangle + \beta|Q\rangle$, wobei sich α und β aus den Bedingungen $\langle q|Q_\perp\rangle = 0$ und $\langle Q_\perp|Q_\perp\rangle = 1$ ergeben, den neuen Zustand

$$|\psi\rangle_{oq} = a|q\rangle + b|Q_\perp\rangle = (a+b\alpha)|q\rangle + b\beta|Q\rangle \quad .$$

Mit dem Überlapp z und dem Nichtdiagonalelement der Wechselwirkung x zwischen den nichtorthogonalen Zuständen $|q\rangle$ und $|Q\rangle$, $Z := \langle Q|q\rangle = \langle q|Q\rangle$ und $x := \langle q|H|Q\rangle = \langle Q|H|q\rangle$, kann man die Koeffizienten und die Energie des neuen Grundzustandes berechnen.

Mit $\alpha = -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, Z, X, E_q und E_Q erhält man

$$E_{Q_\perp} = \langle Q_\perp|V|Q_\perp\rangle = \beta^2(E_Q - 2ZX + z^2E_q), \quad E_{qQ_\perp} = \langle q|V|Q_\perp\rangle = \beta(X - zE_q) \quad \text{und}$$

$$E_{oq} = \frac{E_q + E_{Q_\perp}}{2} - \sqrt{\frac{(E_q + E_{Q_\perp})^2}{4} - E_qE_{Q_\perp} + E_{qQ_\perp}^2}$$

und aus diesen wiederum

$$a = \frac{E_{oq} - E_{Q_\perp}}{\sqrt{(E_{oq} - E_{Q_\perp})^2 + E_{qQ_\perp}^2}} \quad \text{und} \quad b = \frac{E_{qQ_\perp}}{\sqrt{(E_{oq} - E_{Q_\perp})^2 + E_{qQ_\perp}^2}} \quad .$$

Für das Mischen benötigt man also im wesentlichen $\langle q|Q\rangle$ und $\langle q|H|Q\rangle$. Den Überlapp $\langle q|Q\rangle$ erhält man, in dem man die

Tatsache benutzt, daß für eine Schale $|q\rangle$ gleich dem normierten T=0- und n-projizierten Neutronen-Protonen-BCS-Zustand ist.

Dies ist zu sehen, in dem man die e-Funktion-Darstellung des Neutron-Proton-BCS-Zustandes (siehe Herleitung der Formel (A3)) als Reihe ausschreibt, mit der Teilchenzahlprojektion den entsprechenden Term der Reihe auswählt und schließlich die Def. (2.1) des Paaroperators $\hat{P}_0^+$ und die auf T=0-projizierte Gleichung (A5) benutzt,

$$P_{T=0} P_n |BCS\rangle \sim P_{T=0} P_n e^{\frac{v}{u}\frac{1}{2}\sum_m (-)^{j-m}(n^+_{jm} p^+_{j-m} + p^+_{jm} n^+_{j-m})}|0\rangle =$$

$$= P_{T=0} P_n \sum_k \frac{1}{k!}\left(\frac{v}{u}\frac{1}{2}\sum_m (-)^{j-m}(n^+_{jm} p^+_{j-m} + p^+_{jm} n^+_{j-m})\right)^k |0\rangle = P_{T=0} P_n \sum_k \frac{1}{k!}\left(\frac{v}{u}\hat{P}_0^+\right)^k |0\rangle \sim$$

$$\sim P_{T=0} (\hat{P}_0^+)^{\frac{n}{2}} |0\rangle \underset{(A.5)}{\sim} |^{n}_{2}, 0\rangle = |q\rangle$$

Damit ergibt sich für den Überlapp $z = \langle q|Q\rangle$,

$$\langle Q|q\rangle = \langle A(n,T=0)|P_{T=0} P_{n,T=0}|BCS(J=0)\rangle \cdot N_Q N_q = \langle A(n,T=0)|BCS(J=0)\rangle N_Q N_q .$$

$|A\rangle$:= "aligned"-Zustand (prolate)

Schreibt man die Normierungskonstanten N_Q und N_q aus, so erhält man:

$$\langle Q|q\rangle = \frac{u^{2j+1}\left(\frac{v}{u}\right)^N}{\sqrt{\langle A|P_J^2|A\rangle \langle BCS|P_n^2 P_{T=0}^2|BCS\rangle}} \quad \text{mit } v^2 = \frac{n}{2(2j+1)} \;,\; u^2 = \frac{2(2j+1)-n}{2(2j+1)}$$

und n = Nukleonenzahl = 2N = 2•Paarzahl.

Die Herleitung des Nichtdiagonalelementes

$$\langle q|H|Q\rangle = \langle BCS(J=0)|P_{n,T=0}\, H\, P_{J=0}|A(n,T=0)\rangle N_Q N_q$$

$$= \langle BCS(J=0)|H|A(n,T=0)\rangle N_Q N_q \quad \text{bei Beachtung von } [H,\hat{N}_0]=0,\ [H,\hat{T}]=0 \text{ und } [H,\hat{J}]=0$$

ist im Anhang B gegeben.

$$\langle q|H|Q\rangle = Z\cdot\Bigg\{\sum_{\substack{J=0\\ \text{ger}}}^{2j-1} V(jjjj\,JT=1)\sum_{m_\gamma=-j}^{j}\sum_{|m_\alpha|\geq jn}\langle jm_\alpha\, j-m_\alpha|J0\rangle\langle jm_\gamma\, j-m_\gamma|J0\rangle(-)^{j-m_\alpha}(-)^{j-m_\gamma}$$

$$-\sum_{J=0}^{2j}\sum_{T=0,1}V(jjjj,J,T)\sum_{\substack{|m_\alpha|,|m_\gamma|\geq jn\\ m_\alpha\neq m_\gamma}}\langle jm_\alpha\, j-m_\alpha|J0\rangle\langle jm_\gamma\, j-m_\gamma|J0\rangle(-)^{j-m_\alpha}(-)^{j-m_\gamma}$$

$$+\sum_{J=0}^{2j}\sum_{T=0,1}\sum_{M=-J}^{J}V(jjjj\,JT)\sum_{\substack{|m_\alpha|,|m_\gamma|\geq jn\\ m_\alpha\neq m_\gamma}}\langle jm_\alpha\, j-m_\gamma|JM\rangle^2 \qquad (3.4)$$

$$+2\sum_{\substack{J=0\\ \text{ger}}}^{2j-1}\sum_{M=-J}^{J}V(jjjj\,J,T=1)\sum_{\substack{|m_\alpha|,|m_\gamma|\geq jn\\ m_\alpha\neq m_\gamma}}\langle jm_\alpha\, jm_\gamma|JM\rangle^2\Bigg\}$$

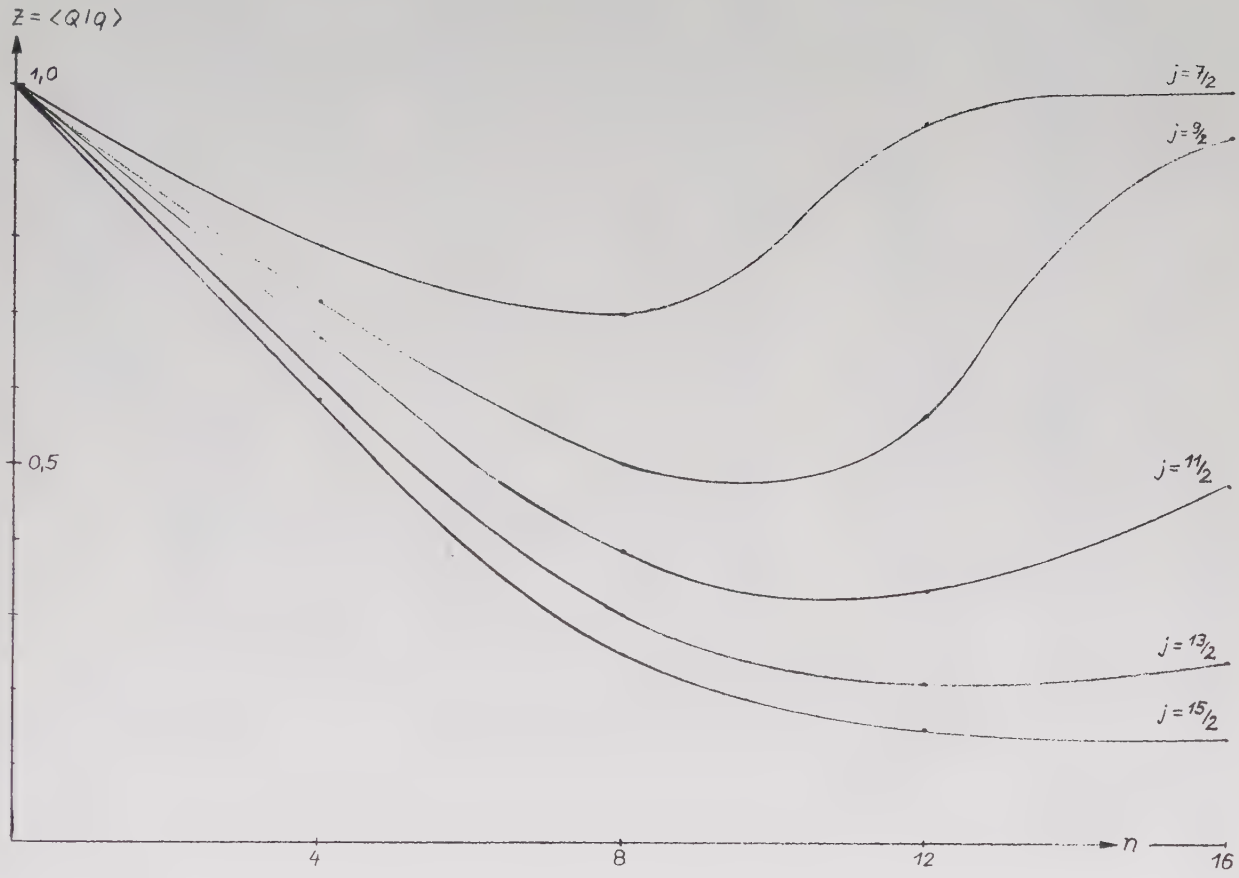
$$\text{mit } jn := j-\tfrac{n}{4}+1\ ,$$

was speziell für Z=1, $V_{JT} = -1$ und $n \leq 2(2j+1)$

$\langle q|H|Q\rangle = \frac{n(n-1)}{2}$ ergibt (also unabhängig von der j-Schale ist).

5. Ergebnisse und Diskussion

Die Ergebnisse der Mischung von Quartett-und Quadrupelzustand mit einer Kuo-Brown-Wechselwirkung[5] (^{40}Ca-core) sind für $j = \frac{7}{2}$ und $j = \frac{9}{2}$ in Tabelle 1 eingetragen und in Figur 2 und 4 teilweise gezeichnet.



Figur 4

Überlapp z des Quartett-(oblate) und Quadrupelzustandes für eine j-Schale in Abhängigkeit von der Teilchenzahl n.

Der Grund für die Nichtsymmetrie des Überlappes zur halbgefüllten Schale ist die Nichtsymmetrie des oblaten Quartettzustandes (der oblate Quartett-Teilchenzustand ist ungleich dem prolaten Quartett-Lochzustand).

Der Überlapp nimmt mit steigender j-Schale und zur halbgefüllten Schale hin ab, wie in Ref. 21) (Seite 46) schon näherungsweise gezeigt wurde.

						$\|\Psi\rangle_0(q) = a\|q\rangle + b\|Q_\perp\rangle$ $\|\Psi\rangle_0(q) = (a+b\alpha)\|q\rangle + b\beta\|Q\rangle$					$\|\Psi\rangle_0(Q) = a\|Q\rangle + b\|q_\perp\rangle$ $\|\Psi\rangle_0(Q) = (a+b\alpha)\|Q\rangle + b\beta\|q\rangle$				
	n	E_q [MeV]	E_Q [MeV]	Z	X [MeV]	$E_0(q)$[MeV]	$a(q)$	$b(q)$	$(a+b\alpha)(q)$	$b\beta(q)$	$E_0(Q)$[MeV]	$a(Q)$	$b(Q)$	$(a+b\alpha)(Q)$	$b\beta(Q)$
$j=7/2$	4	-7,60	-8,67	0,79	-7,41	-8,83	-0,883	-0,470	-0,276	-0,767	-0,883	-0,986	-0,169	-0,767	-0,276
	8	-18,90	-19,64	0,70	-14,80	-20,07	-0,878	-0,478	-0,408	-0,671	-20,07	-0,957	-0,290	-0,671	-0,408
	12	-33,89	-34,87	0,96	-33,16	-35,02	-0,900	-0,436	0,569	-1,532	-35,02	-0,987	0,162	-1,532	0,569
$j=9/2$	4	-5,02	-6,65	0,72	-4,95	-6,66	-0,759	-0,651	-0,084	-0,938	-0,666	-0,938	-0,058	-0,938	-0,084
	8	-13,92	-16,13	0,50	-8,43	-16,18	-0,601	-0,799	-0,140	-0,922	-16,18	-0,993	-0,121	-0,922	-0,140
	12	-26,69	-28,18	0,57	-16,56	-28,30	-0,716	-0,696	-0,235	-0,847	-28,30	-0,981	-0,193	-0,847	-0,235
	16	-43,34	-44,40	0,94	-41,49	-44,67	-0,826	-0,563	0,757	-1,680	-44,67	-0,967	0,254	-1,680	0,756

Tabelle 1

Ergebnisse der Mischung von Quartett- und Quadrupelzustand

unter Verwendung der Matrixelemente von Kuo und Brown (mit ^{40}Ca-Core) [5].

$E_0(q)$, $E_0(Q)$ sind die Gesamtenergien des Grundzustandes $|\Psi\rangle_0$, wenn man einmal vom Quadrupelzustand $|q\rangle$ und das zweite mal vom Quartettzustand $|Q\rangle$ ausgeht. $Z = \langle q|Q\rangle$ ist der Überlapp und $x = \langle q|H|Q\rangle$ das Nichtdiagonalelement. E_q und E_Q sind die Quadrupelenergie $\langle q|H|q\rangle$ und die Quartettenergie $\langle Q|H|Q\rangle$.

Natürlich müssen $E_0(q) = E_0(Q)$, $(a+b\alpha)(q) = b\beta(Q)$ und $b\beta(q) = (a+b\alpha)(Q)$ sein, da die Gesamtenergie E_0 und der Grundzustand $|\Psi\rangle_0$ nicht von der gewählten Bezugsbasis abhängig sein dürfen.

Es zeigt sich, daß die neue Grundzustandsenergie nur sehr wenig unter der Quartettenergie liegt und daß die Quartettfunktion für eine j-Schale eine bessere Näherung als die Quadrupelfunktion ist, was sich aus dem Vergleich der Mischungskoeffizienten a, b, (a + bα) und bβ ergibt. Der Quartettzustand ist gegenüber dem Quadrupelzustand um so besser, je größer die j-Schale ist und je mehr man sich der halbgefüllten Schale nähert.

Der Überlapp z zwischen Quartett- und Quadrupelzustand hat ein ähnliches Verhalten, er nimmt ab, je größer die j-Schale wird und je mehr man sich der halbgefüllten Schale nähert. Die Nichtsymmetrie des Überlapps zur halbgefüllten Schale in Figur 4 rührt von der Nichtsymmetrie der Normierungskonstanten N_Q des Quartettzustandes her, was wiederum die Folge der Nichtsymmetrie des oblaten Quartettzustandes zur halbgefüllten Schale ist (der oblate Quartettzustand für n-Teilchen ist nicht gleich dem prolaten Lochquartettzustand für n-Löcher).

Die Quartettenergie E_Q liegt für eine j-Schale niedriger als die Quadrupelenergie E_Q (Figur 2), da die Quartettkopplung die größeren gekoppelten Zweiteilchenmatrixelemente V_{JT} in Formel (3.3) (siehe auch Figur 3) besser wichtet als das Quadrupelkopplungsschema.

. Diagonalisation eines allgemeinen Hamiltonoperators (drehinvariant und ladungsunabhängig) im Zweischalenmodell

Der Hamiltonoperator

$$H = (\hat{N}_a - \hat{N}_{a'})\,C + \frac{1}{4}\sum_{\substack{ab\\cd}} \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{ab}}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\delta_{cd}}} \sum_{\substack{JT\\MT_3}} V_{AN}\,(ab\,|\,cd)\,\big[C_\alpha^+ C_\beta^+\big]^{JM}_{TT_3}\,\big[C_\delta\,C_\gamma\big]^{J-M}_{T-T_3} \quad , \tag{4.1}$$

mit dem Schalenabstand D, wird in der nicht vollständigen orthonormalen Basis von Zuständen, die man durch Kopplung der Zustände (2.10) erhält,

$$|N_1 T_1 N_2 T_2;\, N T T_0\rangle = \sum_{\substack{T_{10}\\T_{20}}} \langle T_1 T_{10}\, T_2 T_{20} | T T_0\rangle\, |N_1 T_1 T_{10}\rangle\, |N_2 T_2 T_{20}\rangle \quad , \quad \text{mit } N_1 + N_2 = N = \frac{n}{2} \quad .$$
$$N = \text{Paarzahl}$$

diagonalisiert.

Die Matrixelemente erhält man folgendermaßen:

.1. Nichtdiagonalmatrixelement

Für eine drehinvariante und ladungsunabhängige Wechselwirkung ist das Nichtdiagonalelement

$$\langle N_1' T_1' N_2' T_2';\, N T T_0 | V | N_1 T_1 N_2 T_2;\, N T T_0\rangle \tag{4.2}$$

nur dann ungleich Null, wenn

$$\begin{aligned} &1.\ N_1' = N_1 - 1 \text{ und } N_2' = N_2 + 1 \text{ und } T_1' = T_1 \pm 1 \text{ und } T_2' = T_2 \pm 1 \\ &\qquad\qquad \text{oder} \\ &2.\ N_1' = N_1 + 1 \text{ und } N_2' = N_2 - 1 \text{ und } T_1' = T_1 \pm 1 \text{ und } T_2' = T_2 \pm 1 \quad . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dies folgt einfach aus der Eigenschaft (2.11), daß in jeder Schale N-T gerade sein muß. In diesem Fall nämlich erhält man mit $\Delta T = \pm 1$ für Nichtdiagonalmatrixelemente und der

Erhaltung von Teilchen und Paaren von $N_1 - N_1' - \Delta T$ = gerade den obigen speziellen Satz von Quantenzahlen.

Die Quantenzahlen (4.3) zeigen, daß immer ein Paar in einer Schale erzeugt oder vernichtet wird. Deshalb wirken die gekoppelten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im (4.1) je nur auf eine Schale (nicht auf zwei gleichzeitig). In dem man im Matrixelement (4.2) die gekoppelten Paaroperatoren zu den entsprechenden Schalenzuständen separiert und beachtet, daß in jeder Schale J=0 ist, sieht man, daß nur die J=0, T=1 Wechselwirkungen beitragen. Das heißt, in den Nichtdiagonalelementen gibt nur die Paarungskraft Beiträge.

Durch Ersetzung von $(-\frac{G_p}{2})$ im Nichtdiagonalelement des Modell-Hamiltonoperators in Formel (3.4) aus Ref. 1) durch

$$V_{AN}(abcd\,J=0,T=1)\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)}$$

erhält man das Nichtdiagonalelement des allgemeinen Hamiltonoperators:

$$\langle N_1' T_1' N_2' T_2'; N T T_0 | H | N_1 T_1 N_2 T_2; N T T_0 \rangle =$$

$$\frac{V_{AN}(j_1 j_1 J=0T=1; j_2 j_2 J=0T=1)}{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)}} \sum_{L_1=T_1\pm1} \sum_{L_2=T_2\pm1} (-)^{L_1+L_2-T} \sqrt{(2L_1+1)(2L_2+1)} \begin{Bmatrix} T_1 & T_2 & T \\ L_2 & L_1 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \tag{4.4}$$

$$\cdot \left[P^{(-)}_{N_1 T_1 L_1} P^{(+)}_{N_2 T_2 L_2} \delta_{N_1', N_1 - 1} \delta_{N_2', N_2 + 1} \delta_{T_1', L_1} \delta_{T_2', L_2} \right.$$

$$\left. + P^{(+)}_{N_1 T_1 L_1} P^{(-)}_{N_2 T_2 L_2} \delta_{N_1', N_1 + 1} \delta_{N_2', N_2 - 1} \delta_{T_1', L_1} \delta_{T_2', L_2} \right] .$$

$$P^{(-)}_{NTL} = -\frac{C_{NT}}{C_{N-1,L}} \sqrt{\frac{(2T-1)!!\,L!}{(2L-1)!!\,T!}} \frac{2T+1}{2L+1} \langle T0\,10 | L0 \rangle \quad , \; P^{(+)}_{NTL} \text{ siehe 2.16)}$$

2. Diagonalmatrixelement

Das Diagonalmatrixelement wird von Talmi[13] (Seite 538) übernommen:

$$\langle N_1 T_1 N_2 T_2; \alpha T | H | N_1 T_1 N_2 T_2; \alpha T \rangle = (N(2)-N(1))D + \langle j_1^{n_1} T_1 j_2^{n_2} T_2; T | \sum_{i<k}^{n_1+n_2} V_{ik} | j_1^{n_1} T_1; j_2^{n_2} T_2; T \rangle$$

$$= (N(2)-N(1))D + \langle j_1^{n_1} T_1 | \sum_{i<k}^{n_1} V_{ik} | j_1^{n_1} T_1 \rangle + \langle j_2^{n_2} T_2 | \sum_{i<k}^{n_2} V_{ik} | j_2^{n_2} T_2 \rangle \qquad (4.5)$$

$$+ \langle j_1^{n_1} T_1 j_2^{n_2} T_2; T | \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} V_{ik} | j_1^{n_1} T_1 j_2^{n_2} T_2; T \rangle \quad ,$$

N_1, N_2 = Paarzahlen und $n_1 n_2$ = Nukleonenzahlen von Schale 1 und 2 ($N = \frac{n}{2}$) .

Die Einschalenmatrixelemente sind durch Formel (3.2) gegeben. Das Zwischenschalenmatrixelement (4.6) wird wieder von Talmi[13] (Seite 538) übernommen. Mit den "coefficients of fractional parentage" (cfp) von Talmi[13] (Seite 535) oder Hecht[6] (Seite 59, Tabelle 9b)

$$\langle j_1^{n_1} T_1 j_2^{n_2} T_2; T | \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} V_{ik} | j_1^{n_1} T_1 j_2^{n_2} T_2; T \rangle = \frac{1}{\Omega_1 \Omega_2} \sum_{\substack{T_{11}=T_1\pm\frac{1}{2} \\ T_{22}=T_2\pm\frac{1}{2}}} [c\bar{f}p(N_1 T_1 T_{11})]^2 [c\bar{f}p(N_2 T_2 T_{22})]^2 \cdot$$

$$\cdot \sum_{T'=0,1} \sum_{J'=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2T'+1)(2J'+1) V(j_1 j_2 T' J') \sum_{T_{12}} (2T_{12}+1) \begin{Bmatrix} T_{11} & \frac{1}{2} & T_1 \\ T_{22} & \frac{1}{2} & T_2 \\ T_{12} & T' & T \end{Bmatrix} \quad , \qquad (4.6)$$

$$\text{mit } [c\bar{f}p(N_i T_i T_{ii})]^2 = \begin{cases} 2(N_i - T_i)(T_i+1) & \text{für } T_{ii} = T_i + \frac{1}{2} \\ 2(N_i + T_i + 1) T_i & \text{für } T_{ii} = T_i - \frac{1}{2} \end{cases} \quad ,$$

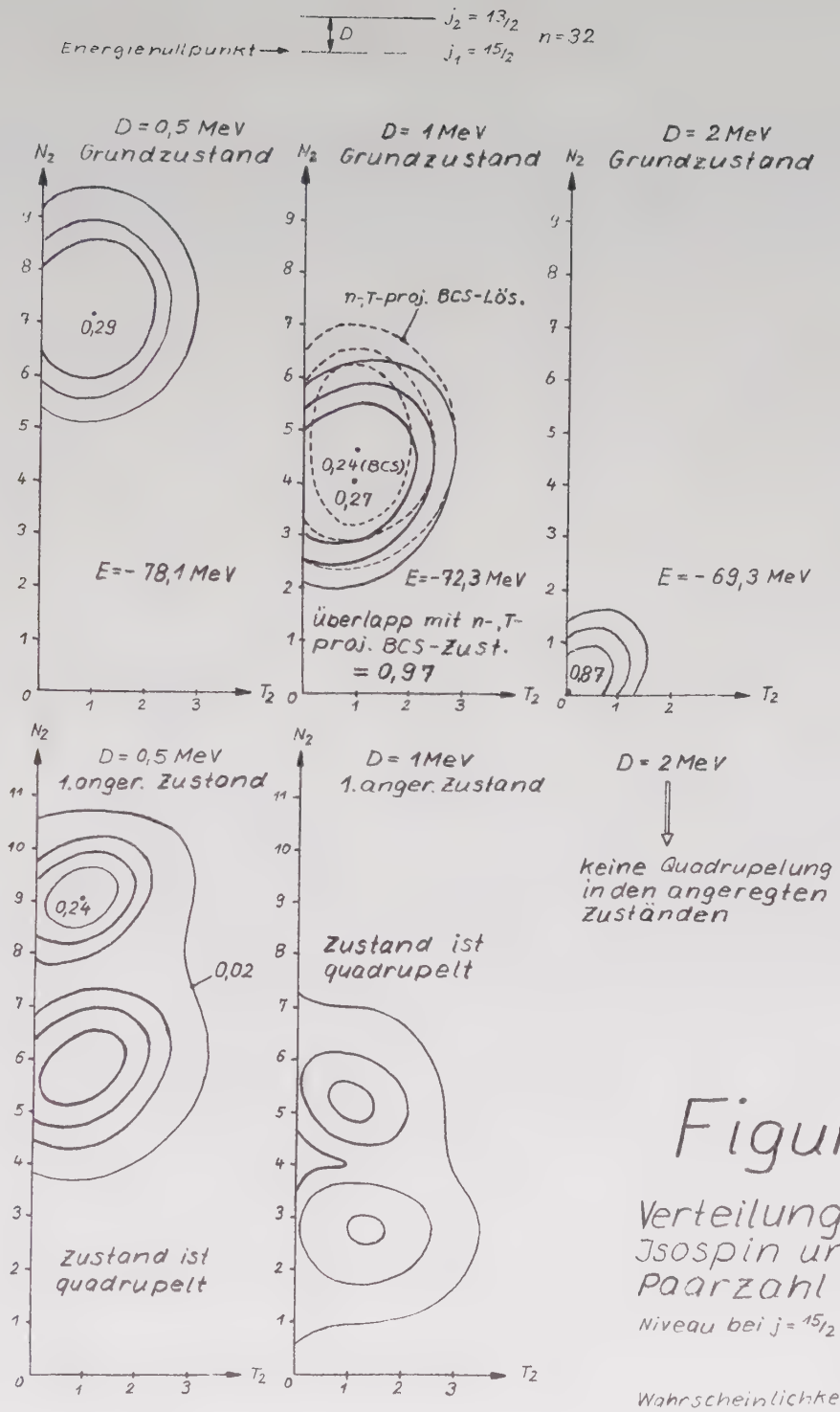
ergibt sich das Diagonalmatrixelement.

3. Ergebnisse und Diskussion

Die Diagonalisation zeigt, daß nahezu alle Nukleonen Quadrupel bilden. Dies kann wie folgt gesehen werden. Definitionsgemäß formen Paare Quadrupel, wenn sie zu T=O koppeln. Das vorliegende System besteht aus zwei Schalen mit einem Gesamtisospin gleich Null. Der Isospin der einzelnen Schalen sagt aus, wieviele Quadrupel aufgebrochen sind. Trägt man in einem Höhenliniendiagramm die Wahrscheinlichkeitsverteilung in Abhängigkeit von N_2 und T_2 (Paarzahl und Isospin in der oberen Schale) auf, so sagt die Lage des Wahrscheinlichkeitsberges aus, wieviele Quadrupel aufgebrochen sind.

Die Diagonalisation für die Schalen j = 15/2 und j = 13/2 und einer Gillet-Wechselwirkung Gl. (3.0) zeigt (Figur 5), daß mit großem N_2, im Vergleich zu T_2, die meisten Nukleonen Quadrupel bilden. Mit zunehmendem Schalenabstand D (was sich wie eine Verringerung der Wechselwirkung auswirkt) werden N_2 und T_2 klein. Es liegt also im Grenzfall ein einfacher Schalenmodellzustand vor, in dem die untere Schale gefüllt ist. In diesem Fall sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der ersten angeregten Zustände von besonderem Interesse. An ihnen kann man sehen, ob die niedrigliegenden Elementaranregungen des Systems im wesentlichen Anregungen von Quadrupeln oder von Paaren sind. Man findet, daß die angeregten Zustände sich von den Grundzuständen nur in der Zahl der Quadrupel unterscheiden und dies relativ unabhängig von der Größe des Schalenabstandes D ist. Erst bei großem Abstand D der Einteilchenniveaus reicht die Gillet-Wechselwirkung (3.0) nicht mehr aus, stabile Quadrupel zu bilden. Letzteres ist der Grund dafür, daß für den einigermaßen realistischen Fall mit den Schalen j =f7/2 und j =f5/2 (Figur 6) und D = 6.36 MeV (dem ^{41}Ca-Spektrum entnommen[23]) und einer Kuo-Brown-Wechselwirkung[5] keine Quadrupel mehr vorliegen.

Realistisch bedeutet hier nur soviel, daß bei den gewählten j-Schalen und deren Matrixelementen[5] (mit ^{40}Ca-Core) es sich



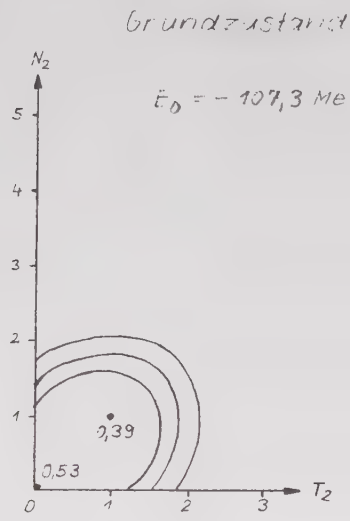
Figur 5

Verteilung von Isospin und Paarzahl im oberen Niveau bei $j = 15/2$ und $j = 13/2$.

Wahrscheinlichkeitsniveaus von $W(N_2, T_2)$, von außen nach innen steigend (0,05; 0,10; 0,15), in Abhängigkeit vom Isospin T_2 und Paarzahl N_2 in der oberen Schale bei $T_{ges.} = 0$ und $N_{ges.} = 2j+1$ unter Verwendung der Gillet-wechselwirkung (3.0) aufgetragen. Die n-,T-proj. BCS-Lösungen sind mit aufgetragen. Der Energienullpunkt liegt in der unteren Schale. Sinnvoll sind nur T- und N-Werte, die die Bedingung N-T = gerade erfüllen.

Mit größer werdendem Schalenabstand D nimmt N_2 bei nahezu gleichbleibendem T_2 ab, d.h. bei etwa einem aufgebrochenen Quadrupel nimmt die Zahl der Quadrupel ab. Wird der Abstand D zu groß, kann reicht die Gillet-Wechselwirkung[2)] (3.0) nicht mehr aus, stabile Quadrupel zu bilden. Der proj. BCS-Zustand ist eine gute Näherung.

bei der verwendeten Teilchenzahl n=16 um einen Kern der Kalziumgegend handelt, für den man die Einteilchenenergien dem ^{41}Ca-Spektrum (siehe Ref. 23) entnehmen kann. Zwar ist das



In den angeregten Zuständen liegen keine Quadrupel vor (D zu groß).

$E_1 = -99,4$

$E_2 = -93,0$

Figur 6

Verteilung von Isospin und Paarzahl im oberen Niveau

(bei $j = 7/2$ und $j = 5/2$)

Wahrscheinlichkeitsniveaus von $W(N_2,T_2)$, von außen nach innen steigend (0,05; 0,10; 0,15), in Abhängigkeit vom Isospin T_2 und Paarzahl N_2 in der oberen Schale bei einem Gesamtisospin $T_{ges.} = 0$ und einer Gesamtpaarzahl $N_{ges} = 2j_1+1$. [illegible] wurden die Matrixelemente von Kuo und Brown[23] verwendet; Rechnungen mit der Gillet Wechselwirkung[24] (3.0) ergeben qualitativ das gleiche. Dünn sind T_2 und N_2-Werte, die die Bedingung $N_2 - T_2$ = gerade erfüllen.

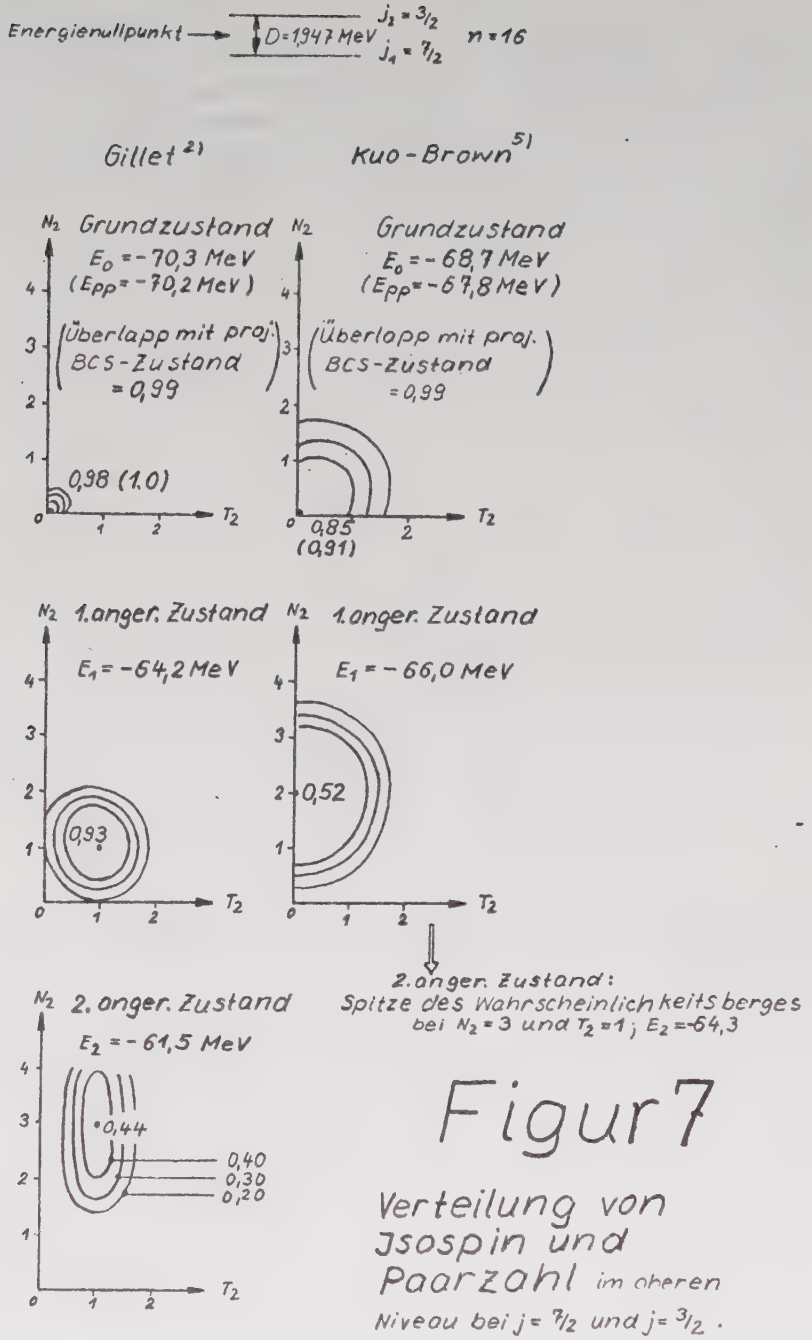
Auf Grund des großen Schalenabstandes D (dem ^{41}Ca-Spektrum[23] entnommen) bilden die Nukleonen in diesem System keine Quadrupole.

System nicht wirklich realistisch, denn dann müßte man eine Basis mit mehr als zwei Schalen wählen und die Renormierung der Einteilchenenergien bei größerer Teilchenzahl berücksichtigen. Aber die Größe der Einteilchenenergien ist in soweit richtig, als daß eine kleine Änderung das Ergebnis nicht qualitativ verändert. Im Fall der Schalen j = 15/2 und j = 13/2 dagegen hat man erstens keine entsprechenden Matrixelemente (obwohl sie nicht das Ergebnis entscheidend ändern) und zweitens keine Daten für die Einteilchenenergien.

Im anderen realistischen Fall (Figur 7) mit den Schalen j =f7/2 und j =p3/2 und dem relativ kleinen Abstand D = 1.947 MeV (dem ^{41}Ca-Spektrum[23]) entnommen) zeigt die Kuo-Brown-Wechselwirkung die Tendenz Quadrupel als Elementaranregungen zu haben, wohingegen die Gillet-Wechselwirkung als niedrigste Anregung eine Paaranregung bevorzugt und dieser erst im zweiten angeregten Zustand ein Quadrupel hinzufügt.

Allgemein kann gesagt werden, daß die Systeme die Eigenschaft zeigen, Quadrupel als Elementaranregungen zu haben, die aber bei zunehmendem Schalenabstand zerstört wird. Dabei begünstigt die Kuo-Brown-Wechselwirkung[5]) im Vergleich zur Gillet-Wechselwirkung (3.0) die Bildung von stabilen Quadrupeln.

Berücksichtigt man bei der Diagonalisation nur die Paarmatrixelemente der Wechselwirkung (d.h. nur $V_{J=0,T=1} \neq 0$), was natürlich das gleiche Ergebnis liefert wie man es mit dem Modellhamiltonoperator in Ref. 1) erhalten hätte, so zeigt sich, daß die Energien viel höher liegen, während die Zustände noch eine gute Näherung sind (siehe Tabelle 2). Daraus lernt man, daß die anderen Matrixelemente ($V_{J\neq0}$) wesentlich die Energie der Zustände beeinflussen, nicht aber so sehr die Zustände selber.



Figur 7

Verteilung von Isospin und Paarzahl im oberen Niveau bei $j = 7/2$ und $j = 3/2$.

Wahrscheinlichkeitsniveaus von $W(N_2, T_2)$, von außen nach innen steigend (0,05; 0,10; 0,15), in Abhängigkeit vom Isospin T_2 und Paarzahl N_2 in der oberen Schale bei einem Gesamtisospin von $T_{ges} = 0$ und einer Gesamtpaarzahl $N_{ges} = 2j+1$ aufgetragen. Links die Berechnungen mit der Gillet-Wechselwirkung (3.0)[2] und rechts mit den Kuo-Brown-Matrixelementen.[5] Die n- und T=0- proj. BCS-Näherungen sind in Klammern beigefügt, wobei $E_{pp} = \langle BCS | P_{n,T} H P_{n,T} | BCS \rangle$ bedeutet. Sinnvoll sind nur N_2- und T_2-Werte, die die Bedingung N-T = gerade erfüllen.

Die Nukleonen sind im wesentlichen quadrupelt, bei der Kuo-Brown-Wechselwirkung etwas mehr als bei der Gillet-Wechselwirkung. Die proj. BCS-Näherungen sind gut.

$j=\frac{7}{2},\frac{3}{2}$; D=1,947MeV mit Kuo-Brown Matrixelementen[3] berechnet	Energien der Diagonalisation bei Berücksicht. aller Matrixel. in MeV	Überlapp	Energien der Diagonalisation bei Berücksicht. der Paarmatrixel. in MeV
Grundzustand	-68,7	0,99	-21,7
1. anger. Zustand	-66,0	0,92	-19,0
2. anger. Zustand	-64,3	0,89	-17,3

Tabelle 2

Vergleich der Diagonalisationsergebnisse bei dem einerseits alle Kuo-Brown-Matrixelemente und andererseits nur der Paarmatrixelemente ($V_{J=0,T=1}\neq 0$) berücksichtigt werden. Verwendet man nur die Paarmatrixelemente, so liegen die Energien viel höher, während die Zustände noch eine gute Näherung sind.

Dies zeigt, daß die Nichtpaarmatrixelemente ($V_{J\neq 0}$) die Energie der Zustände wesentlich beeinflussen, nicht aber so sehr die Zustände selber.

5. n- und T-projizierte Neutron-Proton-BCS-Näherung für mehrere Schalen mit $T_z=0$

Die T=1 Paarungstheorie liefert bei $n_n=n_p$-Kernen zwei typische Lösungen für den Grundzustand[14,15,16,17]:

$$|BCS_i\rangle = \prod_j \prod_{m>0} (u_j + v_j (-)^{j-m} c^+_{jm\frac{1}{2}} c^+_{j-m\frac{1}{2}})(u_j - v_j (-)^{j-m} c^+_{jm-\frac{1}{2}} c^+_{j-m-\frac{1}{2}})|0\rangle$$

$$|BCS_{ii}\rangle = \prod_j \prod_m (u_j + v_j (-)^{j-m} c^+_{jm\frac{1}{2}} c^+_{j-m-\frac{1}{2}})|0\rangle := |BCS\rangle \ ,$$

$$\text{mit } |BCS_{ii}\rangle = e^{-i\frac{\pi}{2}Y}|BCS_i\rangle \text{ und } t_p=\tfrac{1}{2},\ t_n=-\tfrac{1}{2} \ .$$

Die beiden extremen Lösungen i und ii, wobei die erstere nur Wechselwirkung enthält zwischen gleichen Teilchen und die letztere nur zwischen Neutronen und Protonen, führen zur gleichen genäherten Energie. Dies folgt aus der Ladungsunabhängig-

keit des Hamiltonoperators, denn die beiden BCS-Zustände unterscheiden sich nur durch eine Drehung im Isoraum,[+)] unter welcher der Hamiltonoperator invariant ist. Solange man nicht nach Erwartungswerten von nichtisoinvarianten Observablen fragt und von der Struktur absieht, sind beide BCS-Zustände gleich. Da die zweite Lösung einfacher zu handhaben ist, wird diese benutzt und mit $|BCS\rangle$ bezeichnet.

5.1. Grundzustandsnäherung

Entwickelt man den Neutron-Proton-BCS-Zustand nach den Modellbasiszuständen (siehe Anhang A), so ergibt sich für eine Schale j_i $(i = 1,2)$:

$$|BCS_{ji}\rangle = \sum_{\substack{k_i=0 \\ ger.}}^{2j_i+1} \sum_{\nu_i=0}^{k_i/2} \sum_{\substack{T_i=0 \\ ger.}}^{2\nu_i} y_i^{k_i} A^{(ji)}_{k_i,\nu_i,T_i} |k_i, T_i, 0\rangle + \sum_{\substack{k_i=1 \\ unger.}}^{2j_i} \sum_{\nu_i=0}^{2\nu_i} \sum_{\substack{T_i=0 \\ ger.}}^{2\nu_i} \frac{y_i^{k_i}}{k_i} A^{(ji)}_{k_i-1,\nu_i,T_i} \cdot$$

$$\cdot \sum_{L_i=\frac{T_i-1}{T_i+1}} P^{(+)}_{k_i-1,T_i,L_i} \langle T_i 0\, 1 0 | L_i 0\rangle |k_i, L_i, 0\rangle \quad ,$$

mit $y_i = \frac{v_{ji}}{u_{ji}}$, $A^{(j)}_{k,\nu,T}$ siehe Anhang A und

$P^{(+)}_{k,T,L}$ siehe Ref. 1) (Formel (A3.2)).

Entwickelt man die einzelnen Produktterme von $|BCS(J=0)\rangle = |BCS_{j_1}\rangle |BCS_{j_2}\rangle$ nach dem Gesamtisospin T_{ges}, so erhält man den BCS-Zustand in der Modellbasis. Diese Zerlegung des BCS-Zustandes ist für einen Vergleich und eine physikalische Interpretation geeignet; speziell die n- und T-Projektion ist einfach.

5.2. Energie des Hamiltonoperators zwischen n- und T-projizierten BCS-Zuständen

Die Herleitung der Formel zur Berechnung der Energie E_{pp} des rotationsinvarianten und ladungsunabhängigen Hamiltonoperators zwischen n- und T-projizierten BCS-Zuständen,

---

+) siehe Anhang A

$$E_{pp} = \frac{\langle BCS|P_n\, P_{T=0}\, H P_n\, P_{T=0}|BCS\rangle}{\langle BCS|P_n\, P_{T=0}\, P_n\, P_{T=0}|BCS\rangle} \quad ,$$

deren großer Vorteil unter anderen in der Vermeidung der lästigen Isospinkopplung bei vielen Schalen besteht, ist im Anhang A (Teil 2) für mehrere j-Schalen gegeben und führt zu der Formel

$$E_{pp} = 2\sum_{j_\alpha} \varepsilon_{j_\alpha}(2j_\alpha+1)\left(1-\frac{\int\langle\rangle\frac{a_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}}{\int\langle\rangle}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j_\alpha j_\beta}\sum_{J=|j_\alpha-j_\beta|}^{j_\alpha+j_\beta}\sum_{T=0,1}(1+\delta_{j_\alpha j_\beta})V_{AN}(j_\alpha j_\beta j_\alpha j_\beta JT)(2J+1)\Big[(2T+1)\Big\{1+\frac{1}{\int\langle\rangle}\int\langle\rangle\Big(-\frac{a_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}-\frac{a_{j\beta}}{c_{j\beta}}+\frac{a_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}\frac{a_{j\beta}}{c_{j\beta}}\Big)\Big\}+$$

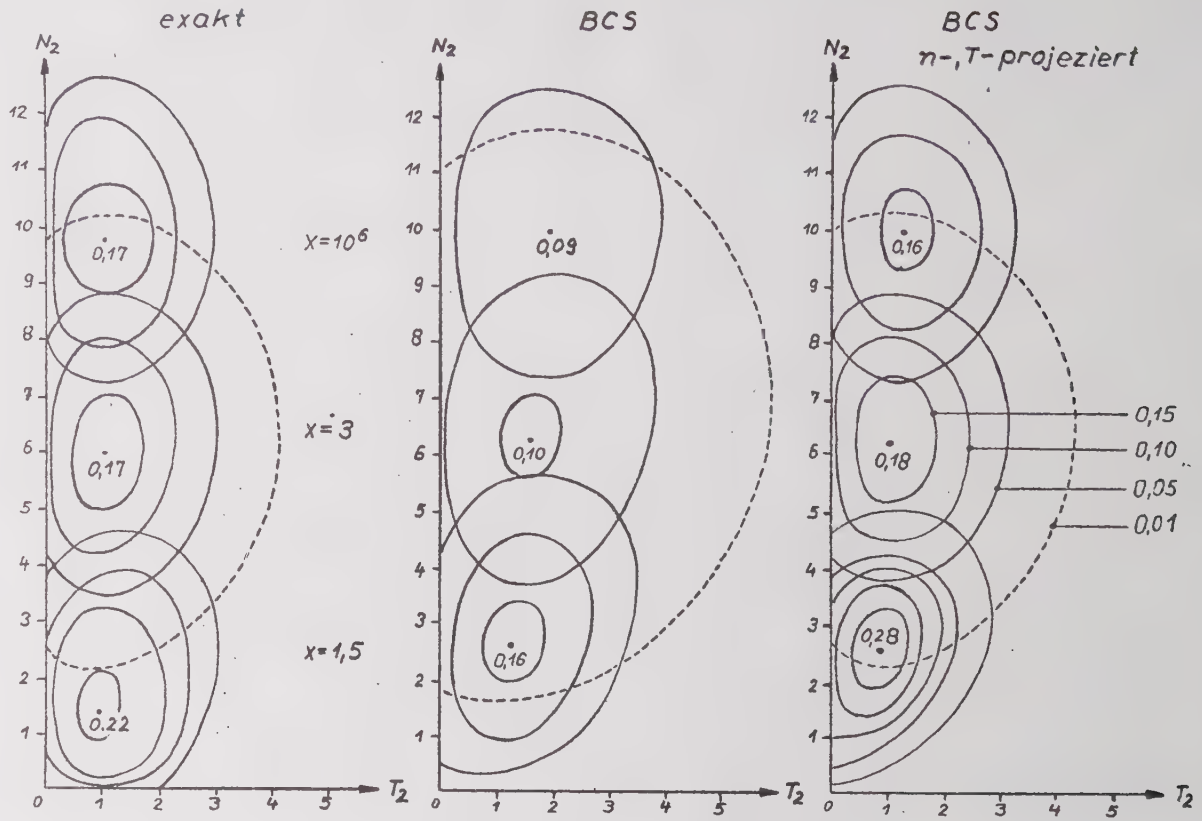
$$+(-)^T\frac{1}{(\int\langle\rangle)}\int\langle\rangle\frac{b_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}\frac{b_{j\beta}}{c_{j\beta}}\Big]$$

$$+\sum_{j_\alpha j_\beta}\sum_{J=|j_\alpha-j_\beta|}^{j_\alpha+j_\beta}V_{AN}(j_\alpha j_\alpha j_\beta j_\beta JT=1)\frac{v_{j\alpha}}{u_{j\alpha}}\Big/\frac{v_{j\beta}}{u_{j\beta}}f(J,j_\alpha,j_\beta)\frac{1}{(\int\langle\rangle)}\int\langle\rangle\Big(\frac{a_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}-\frac{a_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}\frac{a_{j\beta}}{c_{j\beta}}+\frac{b_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}\frac{b_{j\beta}}{c_{j\beta}}\Big).$$

Alle Größen dieser Formel sind im Anhang A (Teil 2) gegeben, wobei die Integrationen analytisch ausgeführt werden.

5.3. Ergebnisse und Diskussion

Die nichtprojizierte Neutron-Proton-BCS-Näherung des Grundzustandes für den Modellpaarhamiltonoperator von Ref. 1 ist, wie der Vergleich mit der exakten Lösung (im Rahmen der Modellbasis) in Figur 8 zeigt, schlecht. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von N_2 und T_2 ist flach und weit und der Überlapp mit der exakten Lösung ist klein (zwischen 0,11 und 0,18 je nach Paarstärke x). Durch Projektion auf gute Teilchenzahl und guten Isospin ergibt sich ein Zustand, der dem exakten sehr ähnlich ist (Der Überlapp liegt zwischen 0,966 und 0,999 je nach der Paarstärke x). Wie bei der exakten Lösung ergibt sich ein Zustand der im wesentlichen aus Quadrupeln besteht.



Figur 8

Verteilung von Isospin T_z und Paarzahl N_2 in der oberen Schale

($T_{ges.} = 0$, $N_{ges.} = \Omega = 20$)

Höhenliniendiagramm für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Isospin und Paarzahl in der oberen Schale für einen Paar-Hamiltonoperator der Paarstärke x. Links: die exakte Lösung, mitte: die unprojezierte BCS-Lösung, rechts: BCS-Lösung nach der Projektion auf guten Gesamtisospin und gute Gesamtteilchenzahl.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der unprojizierten BCS-Lösung ist flach und weit und der Überlapp mit der exakten Lösung ist klein (zwischen 0,11 und 0,18 je nach Paarst. x). Die n-und T-proj. BCS-Lösung ergibt einen Zustand, der dem exakten sehr ähnlich ist (Überlapp zwischen 0,966 und 0,999). Sinnvoll sind nur T_z-und N_2-Werte für $N_2 - T_z$ = gerade ist.

Die n- und T-projizierte Neutron-Proton-BCS-Näherung des Grundzustandes für den rotationsinvarianten und ladungsunabhängigen Hamiltonoperator ist gut, wie man aus dem Vergleich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen $W(N_2,T_2)$ und dem Überlapp in Figur 5 und 7 ersehen kann, wenn auch nicht mehr ganz so gut, wie im Falle des Paarhamiltonoperators aus Ref. 1. Der Überlapp mit der exakten Lösung beträgt aber immerhin noch 0.97 (j = 15/2, 13/2 in Figur 5 bzw. j = 7/2, 3/2 in Figur 7).

Die Energien des rotationsinvarianten und ladungsunabhängigen Hamiltonoperators zwischen den n- und T-projizierten Neutron-Proton-BCS-Zuständen stimmen sehr gut mit den Werten der Diagonalisation überein (siehe Figur 7). Sie liegen nur weniger als 1 MeV darüber.

Schlußbetrachtung

Bei der Mischung von Quartett- und Quadrupelzustand in einer Schale zeigt sich, daß der Quartettzustand für sich alleine eine bessere Näherung ist als der Quadrupelzustand (Figur 2 und Tabelle 1). So wie der Überlapp zwischen Quartett- und Quadrupelzustand (Figur 4) mit größer werdender j-Schale und zunehmender Nukleonenzahl abnimmt, so verschlechtert sich auch die Quadrupelenergie E_q gegenüber der Quartettenergie E_Q, während die letztere praktisch gleich der Gesamtgrundzustandsenergie E_o ist (Figur 2).

Die Diagonalisation eines rotationsinvarianten und ladungsunabhängigen Hamiltonoperators in der Modellbasis für zwei Schalen zeigt, daß die Systeme die Eigenschaft besitzen, Quadrupel als Elementaranregungen zu haben (Figur 7), die aber bei zunehmendem Schalenabstand zerstört wird (Figur 5). Dabei begünstigt die Kuo-Brown-Wechselwirkung[5] im Vergleich zur Gillet-Wechselwirkung (3.0) die Bildung von stabilen Quadrupeln (Figur 7).

Berücksichtigt man bei der Diagonalisation nur die Paarmatrixelemente (d.h. nur $V_{J=0,T=0} \neq 0$) der Wechselwirkung, dann liegen die Energien viel höher (Tabelle 2), während die Zustände noch eine gute Näherung sind (siehe Überlapp in Tabelle 2). Die Verwendung des allgemeineren Hamiltonoperators statt eines Paar-Hamiltonoperators brachte ohne mehr Rechenaufwand eine wesentlich bessere Näherung für ein Neutronen-Protonen-System.

Die n- und T-projizierte Neutron-Proton-BCS-Näherung des Grundzustandes für einen rotationsinvarianten und ladungsunabhängigen Hamiltonoperators ist gut (siehe Figur 5 und 7), wenn auch nicht mehr ganz so gut wie im Falle des Paar-Hamiltonoperators aus Ref. 1) (Figur 8). Die Energie des rotationsinvarianten und ladungsunabhängigen Hamiltonoperators zwischen n- und T-projizierten Neutron-Proton-BCS-Zuständen stimmt sehr gut mit den exakten Werten (der Diagonalisation in der Modellbasis) überein (Figur 7).

Anhang A

1.) T=1 Neutron-Proton Paarungsgrundzustands-lösungen bei $n_n = n_p$ ($T_z = 0$)-Kernen

Die T=1 Paarungstheorie liefert bei $n_n = n_p$-Kernen zwei typische Lösungen für den Grundzustand [14, 15, 16, 17.]:

$$|BCS_i\rangle = \prod_j \prod_{m>0} (u_j + v_j s_{jm} C^+_{jm\frac{1}{2}} C^+_{j-m\frac{1}{2}})(u_j - v_j s_{jm} C^+_{jm-\frac{1}{2}} C^+_{j-m-\frac{1}{2}})|0\rangle \qquad (A.1)$$

$$|BCS_{ii}\rangle = \prod_j \prod_m (u_j + v_j s_{jm} C^+_{jm\frac{1}{2}} C^+_{j-m-\frac{1}{2}})|0\rangle := |BCS\rangle \qquad (A.2)$$

$$\text{mit } |BCS_{ii}\rangle = e^{-i\frac{\pi}{2}T_y}|BCS_i\rangle \text{ und } t_p = \tfrac{1}{2},\ t_n = -\tfrac{1}{2},\ s_{jm} = (-)^{j-m}$$

Die beiden extremen Lösungen i und ii, wobei die erstere nur Wechselwirkungen enthält zwischen gleichen Teilchen und die letztere nur zwischen Neutronen und Protonen, führen zur gleichen genäherten Energie, weil bei einem ladungsunabhängigen Hamiltonoperator die Gesamtenergie nur von der Zahl der T=1 Paare abhängt, welche in beiden Fällen die gleiche ist. Solange man nicht nach Erwartungswerten von nichtisoinvarianten Observablen fragt und von der Struktur absieht, sind alle Größen der beiden Lösungen gleich. Da die zweite Lösung meistens einfacher zu handhaben ist, wird diese benutzt und mit $|BCS\rangle$ bezeichnet.

Die BCS-Gleichungen (Ref. 14, Seite 355-357) lauten ($\Gamma_j = 0$ gesetzt):

$$\Delta_j = -\sum_{j'} V_{A,N}(jj', j'j', J=0\ T=1)\sqrt{\tfrac{2j'+1}{2j+1}}\, u_{j'} v_{j'} \quad ; \quad \varepsilon_j = (E_j - \lambda) \text{ und } \omega_j = \sqrt{\varepsilon_j^2 + \Delta_j^2}$$

$$v_j^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_j}{\omega_j}\right) ; \ u_j^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon_j}{\omega_j}\right) ; \quad n(\lambda) = \sum_j (2j+1)\left(1 - \frac{\varepsilon_j(\lambda)}{\omega_j(\lambda)}\right) ; \ E_j = \text{Einteilchenenergie}$$

Entwicklung der BCS-Lösung nach Modellbasiszuständen

$$|BCS\rangle = \prod_{jm} (u_j + v_j s_{jm} C^+_{jm\frac{1}{2}} C^+_{j-m-\frac{1}{2}})|0\rangle$$

$$= \prod_{j\,m>0} (u_j + v_j s_{jm} p^+_{jm} n^+_{j-m})(u_j + v_j s_{jm} n^+_{jm} p^+_{j-m})|0\rangle$$

$$= \prod_j u_j^{2j+1} \prod_{m>0} e^{\frac{v_j}{u_j} s_{jm}(n^+_{jm} p^+_{jm} + p^+_{jm} n^+_{j-m})}|0\rangle$$, wie man durch Ausschreiben sieht, wenn man beachtet, daß die höheren Potenzen von p^+ und n^+ wegen des Pauliprinzips Null geben. Beachtet man weiterhin $[p^+, n^+]_- = 0$, dann können die Produkte der e-Funktionen in eine Summe im Exponenten umgeschrieben werden. Unter Verwendung von Def. (2.1) ergibt sich schließlich mit der e-Funktionentwicklung:

$$|BCS\rangle = \underbrace{\prod_j u_j^{2j+1}}_{K} \prod e^{\frac{v_j}{u_j}\frac{1}{2}\sum_m s_{jm}(n^+_{jm} p^+_{j-m} + p^+_{jm} n^+_{j-m})}|0\rangle = K \prod_j e^{\frac{v_j}{u_j}\hat{P}^+_0(j)}|0\rangle$$

$$|BCS\rangle = K \prod_j \left\{ \sum_{k=0}^{2j+1} \frac{1}{k!}\left(\frac{v_j}{u_j}\hat{P}^+_0(j)\right)^k \right\}|0\rangle \qquad (A.3)$$

Mit (2.4) $\hat{Q}_0^+ = \hat{P}_0^{+2} - 2\,\hat{P}_{+1}^+\hat{P}_{-1}^+$ folgt

k gerade: $(\hat{P}_0^+)^k\,|0\rangle = (\hat{Q}_0^+ + 2\,\hat{P}_{+1}^+\hat{P}_{-1}^+)^{k/2}\,|0\rangle$

k unger.: $(\hat{P}_0^+)^k\,|0\rangle = \hat{P}_0^+(\hat{Q}_0^+ + 2\,\hat{P}_{+1}^+\hat{P}_{-1}^+)^{\frac{k-1}{2}}\,|0\rangle$

Mit (2.10) ergibt sich $(\hat{P}_\pm^+)^T|0\rangle = C_{TT}\,|N=T,T,\pm T\rangle$ und mit (2.8), (2.9), (2.10) und (2.15) erhält man:

$$(\hat{P}_{+1}^+)^\nu(\hat{P}_{-1}^+)^\nu|0\rangle = \sum_{\substack{T=0\\ \text{ger.}}}^{2\nu} C_{2\nu,T}\sqrt{\frac{\nu!^2\,(2T-1)!!}{T!\,(2\nu-1)!!^2}}\begin{pmatrix}\nu&\nu\\ \nu&-\nu\end{pmatrix}\Big|\begin{matrix}T\\0\end{matrix}\Big)\begin{pmatrix}\nu&\nu\\0&0\end{pmatrix}\Big|\begin{matrix}T\\0\end{matrix}\Big)\,|N'=2\nu,T,0\rangle \qquad (A.4)$$

Wiederholte Anwendung von $\hat{Q}_0^+$ $\left(\hat{Q}_0^+|N,T\,T_0\rangle = Q_{NT}^{(+)}|N+2,T\,T_0\rangle\right)$ gibt

$$(\hat{Q}_0^+)^{k/2-\nu}\,|N'=2\nu,T,0\rangle = \Big(\prod_{N'=2\nu}^{k-2} Q_{N'T}^{(+)}\Big)\,|k,T,0\rangle$$

und mit (2.16) erhält man mit der Binominalreihe von $(\hat{Q}_0^+ + 2\,\hat{P}_{+1}^+\,\hat{P}_{-1}^+)^{k/2}$

$$k\text{ ger.}: (\hat{P}_0^+)^k|0\rangle = \sum_{\nu=0}^{k/2}\binom{k/2}{\nu}2^\nu\sum_{\substack{T=0\\ \text{ger.}}}^{2\nu} C_{2\nu,T}\sqrt{\frac{\nu!^2(2T-1)!!}{T!\,(2\nu-1)!!^2}}\begin{pmatrix}\nu&\nu\\ \nu&-\nu\end{pmatrix}\Big|\begin{matrix}T\\0\end{matrix}\Big)\begin{pmatrix}\nu&\nu\\0&0\end{pmatrix}\Big|\begin{matrix}T\\0\end{matrix}\Big)\Big(\prod_{N'=2\nu}^{k-2}Q_{N'T}^{(+)}\Big)|k,T,0\rangle\,, \qquad (A.5)$$

$$k\text{ unger.}:(\hat{P}_0^+)^k|0\rangle = \sum_{\nu=0}^{\frac{k-1}{2}}\binom{\frac{k-1}{2}}{\nu}2^\nu\sum_{\substack{T=0\\ \text{ger.}}}^{2\nu} C_{2\nu,T}\sqrt{\frac{\nu!^2(2T-1)!!}{T!\,(2\nu-1)!!^2}}\begin{pmatrix}\nu&\nu\\ \nu&-\nu\end{pmatrix}\Big|\begin{matrix}T\\0\end{matrix}\Big)\begin{pmatrix}\nu&\nu\\0&0\end{pmatrix}\Big|\begin{matrix}T\\0\end{matrix}\Big)\Big(\prod_{N'=2\nu}^{k-3}Q_{N'T}^{(+)}\sum_{L=T-1}^{T+1}P_{k-1,T,L}^{(+)}\begin{pmatrix}T&1\\0&0\end{pmatrix}\Big|\begin{matrix}L\\0\end{matrix}\Big)\Big)|k,L,0\rangle. \qquad (A.6)$$

Im Zweischalenfall gibt die BCS-Lösung aufgespalten in je einen Teil für eine Schale

$$|BCS\rangle = \prod_{k_1,k_2}\Big\{\sum_{k_1=0}^{2j_1+1}\frac{1}{k_1!}\Big(\frac{v_{j_1}}{u_{j_1}}\Big)^{k_1}\big(\hat{P}_0^+(j_1)\big)^{k_1}\Big\}\Big\{\sum_{k_2=0}^{2j_2+1}\frac{1}{k_2!}\Big(\frac{v_{j_2}}{u_{j_2}}\Big)^{k_2}\big(\hat{P}_0^+(j_2)\big)^{k_2}\Big\}|0\rangle = \prod_{k_1,k_2}|BCS1\rangle|BCS2\rangle$$

und bei Aufspaltung der k-Summation in einen geraden und ungeraden Teil, ergibt sich mit der Def. der Funktion A

$$A^{(j_i)}_{k_i,\nu_i,T_i} := \frac{(k_i!/2)2^{\nu_i}}{k_i!}\,C^{(j_i)}_{2\nu_i,T_i}\sqrt{\frac{\nu_i!\,(2T_i-1)!!}{T_i!\,(2\nu_i-1)!!^2}}\begin{pmatrix}\nu_i&\nu_i\\ \nu_i&-\nu_i\end{pmatrix}\Big|\begin{matrix}T_i\\0\end{matrix}\Big)\begin{pmatrix}\nu_i&\nu_i\\0&0\end{pmatrix}\Big|\begin{matrix}T_i\\0\end{matrix}\Big)\Big\{\prod_{N_i'=2\nu_i}^{k_i-2}Q_{N_i'T_i}^{(+)(j_i)}\Big\}\;;\quad \frac{v_{ji}}{u_{ji}} := y_i \qquad (A.7)$$

die BCS-Lösung für die Schale j_i $(i=1,2)$:

$$|BCSj_i\rangle = \sum_{\substack{k_i=0\\ \text{ger.}}}^{2j_i+1}\sum_{\nu_i=0}^{k_i/2}\sum_{\substack{T_i=0\\ \text{ger.}}}^{2\nu_i} y_i^{k_i}A^{(j_i)}_{k_i,\nu_i,T_i}|k_i,T_i,0\rangle + \sum_{\substack{k_i=1\\ \text{unger.}}}^{2j_i}\sum_{\nu_i=0}^{2\nu_i}\sum_{\substack{T_i=0\\ \text{ger.}}}^{2\nu_i}\frac{y_i^{k_i}}{k_i}A_{k_i-1,\nu_i,T_i}\sum_{L_i=T_i-1}^{T_i+1}P^{(+)}_{k_i-1,T_i,L_i}\begin{pmatrix}T_i&1\\0&0\end{pmatrix}\Big|\begin{matrix}L_i\\0\end{matrix}\Big)|k_i,L_i,0\rangle \qquad (A.8)$$

Entwickelt man nun die einzelnen Produktterme von $|BCSj_1\rangle|BCSj_2\rangle$ nach dem Gesamtisospin, so erhält man den BCS-Zustand in der Modellbasis. Diese Zerlegung des BCS-Zustandes ist für einen Vergleich und eine physikalische Interpretation geeignet, speziell die π- und T-Projektion ist einfach.

Die Energie des rotationsinv. und ladungsunabh. Hamiltonoperators von projizierten BCS-Zuständen (Epp) könnte mit diesem so erhaltenen BCS-Zustand unter Verwendung der Matrixelemente aus Teil 4 berechnet werden. Bei mehr als zwei Schalen würde sich eine lästige Isospinkopplung ergeben und der Mehrschalenterm des Diagonalelementes wäre viel komplizierter. Deshalb wird im Anhang A.2 (Seite 37) die Energie Epp mit der allgemeinen Methode der Projektionsoperatoren berechnet.

2.) Berechnung der Energie eines rotationsinvarionten und ladungsunabhängigen Hamiltonoperators von projizierten Paarungszuständen

$$Epp = \frac{\langle BCS|P_n P_{T=0} H P_n P_{T=0}|BCS\rangle}{\langle BCS|P_n P_{T=0} P_n P_{T=0}|BCS\rangle} = \frac{\langle BCS|H P_n P_{T=0}|BCS\rangle}{\langle BCS|P_n P_{T=0}|BCS\rangle}$$

$$P_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi\, e^{in\psi} e^{-i\hat{n}\psi}$$

Projiziert man auf einen Zustand bei dem schon $T_z = 0$ ist[18], dann ergibt sich

$$P_{T=0} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\beta\, d\beta\, \underbrace{d^0_{00}(\beta)}_{1}\, e^{-i\beta T_y} \quad \text{und mit der Substitution } \cos\beta = x \text{ folgt}$$

$$P_{T=0} = -\frac{1}{2}\int_{x=1}^{-1} dx\, e^{-i\beta T_y} \quad .$$

Mit $|BCS'\rangle = e^{-i\hat{n}\psi} e^{-i\beta T_y}|BCS\rangle$ erhält man:

$$Epp = \frac{\int_1^{-1} dx \int_0^{2\pi} d\psi\, e^{in\psi}\langle BCS|H|BCS'\rangle}{\int_1^{-1} dx \int_0^{2\pi} d\psi\, e^{in\psi}\langle BCS|BCS'\rangle} \quad .$$

Setzt man $\int_{x=1}^{-1} dx \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi\, e^{in\psi}\langle BCS|BCS'\rangle = \int_{x=1}^{-1} dx \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi\, e^{in\psi}\sqrt{\det(1+M)} := \int\langle\rangle$ ((2.11a) von Ref. 19.) (Integrationsop. wirkt nach rechts),

dann erhält man mit (2.11b) von Ref. 19.)

$$Epp = \frac{\int\langle\rangle\left\{\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \left(\frac{M}{1+M}\right)_{\alpha\alpha} + \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{A\,\alpha\beta\gamma\delta}\left[2\left(\frac{M}{1+M}\right)_{\gamma\alpha}\left(\frac{M}{1+M}\right)_{\delta\beta} + \left(\frac{1}{1+M}F\right)_{\gamma\delta}\left(f^+\frac{1}{1+M}\right)_{\beta\alpha}\right]\right\}}{\int\langle\rangle} \quad , \quad (A.8.1)$$

(1. Term; 2. Term)

worin die verschiedenen Terme berechnet werden müssen.

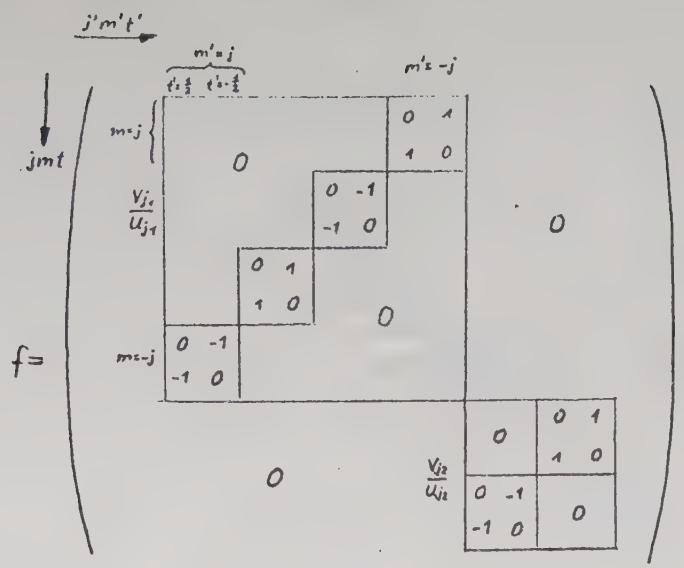
$$|BCS(T_z=0, J=0)\rangle = \underset{(A.3)}{K}\prod_j e^{\frac{v_j}{u_j}\frac{1}{2}\sum_m s_{jm}(n^+_{jm}p^+_{j-m} + p^+_{jm}n^+_{j-m})}|0\rangle = K e^{\frac{1}{2}\sum_{jmt}\frac{v_j}{u_j}s_{jm}C^+_{jmt}C^+_{j-m-t}}|0\rangle$$

$$|BCS\rangle = K\, e^{\frac{1}{2}\sum_{jmtj'm't'} f_{jmt,j'm't'} C^+_{jmt} C^+_{j'm't'}}|0\rangle$$

$$\text{mit } f_{jmt,j'm't'} = \frac{v_j}{u_j}\delta_{jj'}\delta_{m,-m'}s_{jm}\delta_{t,-t'}$$

oder in Matrixform für 2 Schalen ($j_1 = 3/2$, $j_2 = 1/2$) ergibt sich bei Weglassung des Faktors $K = \prod_j u^{2j+1}$ der Ausdruck auf Seite 38 oben.

Bei der weiteren Berechnung von Epp (A.8.1) werden mit den Matrizen f, F (Matrix des im Isoraum gedrehten BCS-Zustandes (A.8.2)) und $M = F \cdot f^+$ die Matrixelemente $\left(\frac{M}{1+M}\right)_{\alpha\beta}$, $\left(\frac{1}{1+M}F\right)_{\alpha\beta}$ und $\left(f^+\frac{1}{1+M}\right)_{\alpha\beta}$ von Epp (in (A.8.1)) berechnet. Dann werden mit den Invarianzeigenschaften von H die verschiedenen Terme von Epp (A.8.1) ohne Integration berechnet und schließlich werden die Integrationen mit der eingeführten Funktion $\mathcal{J}$ (Formel (A.10)) übersichtlich ausgeführt.



$$|BCS'\rangle = e^{-i\hat{n}\psi}\underbrace{e^{-i\beta T_y}}_{R}|BCS\rangle = e^{\frac{1}{2}e^{-2i\psi}\sum_{jmt}\frac{v_j}{u_j}s_{jm}Rc^{+}_{jmt}R^{-1}Rc^{+}_{j-m-t}R^{-1}}|0\rangle$$ +)

$$= e^{\frac{1}{2}e^{-2i\psi}\sum_{jmt}\frac{v_j}{u_j}s_{jm}\sum_{t'}c^{+}_{jm't'}d^{1/2}_{t't}\sum_{t''}c^{+}_{j-mt''}d^{1/2}_{t''-t}}|0\rangle$$

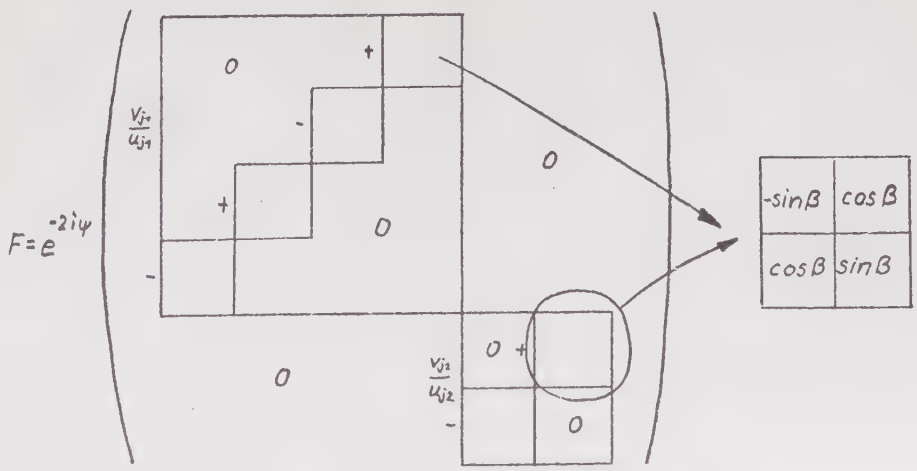
$$t\to t'',\ t'\to t\quad t''\to t'$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sum_{\substack{jmt\\ j'm't'}}e^{-2i\psi}\frac{v_j}{u_j}s_{jm}\sum_{t''}d^{1/2}_{tt''}d^{1/2}_{t'-t''}c^{+}_{jmt}c^{+}_{j-mt'}}|0\rangle$$

$$|BCS'\rangle = e^{\frac{1}{2}\sum_{jmtj'm't'}F_{jmtj'm't'}c^{+}_{jmt}c^{+}_{j'm't'}}|0\rangle$$

$$\text{mit } F_{jmt,j'm't'} = e^{-2i\psi}\frac{v_j}{u_j}s_{jm}\delta_{jj'}\delta_{m,-m'}\sum_{t''}d^{1/2}_{tt''}d^{1/2}_{t'-t''} \qquad (A.8.2)$$

oder als Matrix mit dem ausgeschriebenen Ausdruck $\sum_{t''}d^{1/2}_{tt''}d^{1/2}_{t'-t''}$

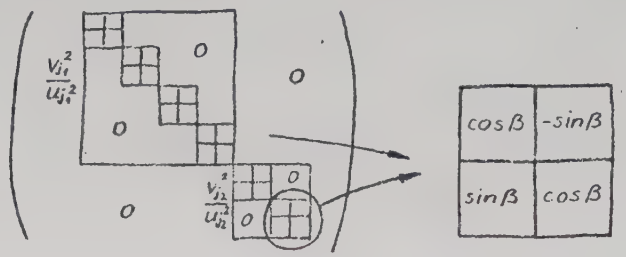


+) Dies sieht man, wenn man die Exponentialdarstellung des BCS-Zustandes als Reihe ausschreibt, $R^{-1}R=1$ zwischen den Fermionoperatoren einschiebt und beachtet, daß $R|0\rangle=|0\rangle$ gilt.

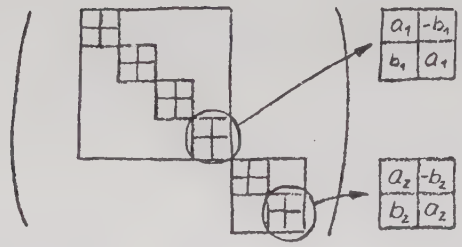
Die Matrizen der Matrixelemente in (A.8.1) ergeben sich zu:

$$M = F \cdot f^{+}$$

$$M = e^{-2i\psi}$$



$$(1+M) =$$



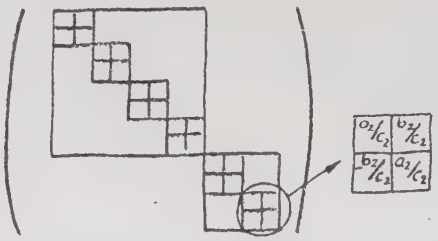
$$a_1 = 1 + e^{-2i\psi \frac{V_{j_1}^2}{U_{j_1}^2}} \cos\beta \; ; \quad \alpha_1 = e^{-2i\psi \frac{V_{j_1}^2}{U_{j_1}^2}} \cos\beta$$

$$b_1 = e^{-2i\psi \frac{V_{j_1}^2}{U_{j_1}^2}} \sin\beta \; ; \quad a - \alpha = 1$$

für a_2 und b_2: $j_1 \rightarrow j_2$

$$\det(1+M) = (a_1^2 + b_1^2)^{(2j_1+1)} \cdot (a_2^2 + b_2^2)^{(2j_2+1)} \qquad a^2 + b^2 := c$$

$$(1+M)^{-1} = \frac{1}{1+M} =$$

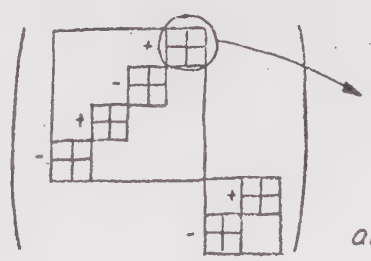


$$\frac{M}{1+M} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/c & b/c \\ b/c & a/c \end{pmatrix} = \left(1 - \begin{pmatrix} a/c & b/c \\ -b/c & a/c \end{pmatrix}\right) = 1 - (1+M)^{-1}$$

$$:= t^{(j)}_{t_\alpha, t_\beta}$$ als Matrix geschrieben

$$\left(\frac{M}{1+M}\right)_{j_\alpha m_\alpha t_\alpha, i_\beta m_\beta t_\beta} = \delta_{j_\alpha, j_\beta}\, \delta_{m_{j_\alpha}, m_{j_\beta}} \left(\delta_{t_\alpha, t_\beta} - t^{(j_\alpha)}_{t_\alpha, t_\beta}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1+M} F\right) =$$

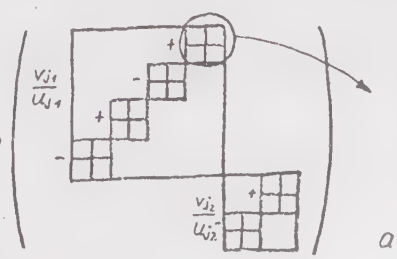


$$\begin{pmatrix} b_1/c_1 & a_1/c_1 \\ -a_1/c_1 & b_1/c_1 \end{pmatrix} = 1 - \underbrace{\begin{pmatrix} b_1/c_1 & a_1/c_1 \\ a_1/c_1 & b_1/c_1 \end{pmatrix}}_{:= \bar{t}^{(j_1)}_{t_\alpha, t_\beta}}$$

als Matrix geschrieben

$$\left(\frac{1}{1+M} F\right)_{\alpha\beta} = \delta_{j_\alpha, j_\beta}\, \delta_{m_{j_{\alpha 1}}, -m_{j_\beta}}\, s_{j_\alpha m_\alpha} \left(\delta_{t_{\alpha_1}, t_\beta} - \bar{t}^{(j_\alpha)}_{t_\alpha, t_\beta}\right) \frac{1}{\frac{V_{j\alpha}}{U_{j\alpha}}}$$

$$\left(f^{+} \frac{1}{1+M}\right) = (-)$$



$$\begin{pmatrix} b_1/c_1 & a_1/c_1 \\ -a_1/c_1 & b_1/c_1 \end{pmatrix}$$

$$:= \bar{\bar{t}}^{(j_1)}_{t_\alpha, t_\beta}$$

als Matrix geschrieben

$$\left(f^{+} \frac{1}{1+M}\right)_{\alpha\beta} = \delta_{j_\alpha, j_\beta}\, \delta_{m_{j_{\alpha 1}}, -m_{j_\beta}}\, s_{j_\alpha - m_\alpha}\, \bar{\bar{t}}^{(j_\alpha)}_{t_\alpha t_\beta}\, \frac{V_{j\alpha}}{U_{j\alpha}} \; .$$

Mit den Invarianzeigenschaften von H,

$$V_A(\alpha\beta,\gamma\delta) = \sum_{\substack{JM\\TT_3}} V_A(j_\alpha j_\beta j_\gamma j_\delta JT)\langle j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM\rangle\langle j_\gamma m_\gamma j_\delta m_\delta | JM\rangle\langle \tfrac12 t_\alpha \tfrac12 t_\beta | TT_3\rangle\langle \tfrac12 t_\gamma \tfrac12 t_\delta | TT_3\rangle ,$$

können die einzelnen Terme von Epp berechnet werden.

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \left(\frac{M}{1+M}\right)_{\alpha\alpha} = \sum_{j_\alpha m_\alpha t_\alpha} \varepsilon_{j_\alpha}\left(1 - t^{(j_\alpha)}_{t_\alpha t_\beta}\right) = 2\sum_{j_\alpha} \varepsilon_{j_\alpha}(2j_\alpha+1)\left\{1 - \frac{a_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\right\}$$

$$1.T. = \sum_{\substack{j_\alpha m_\alpha t_\alpha\\ j_\beta m_\beta t_\beta\\ j_\gamma m_\gamma t_\gamma\\ j_\delta m_\delta t_\delta}} V_A(j_\alpha j_\beta j_\gamma j_\delta JT)\langle j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM\rangle\langle j_\gamma m_\gamma j_\delta m_\delta | JM\rangle\langle \tfrac12 t_\alpha \tfrac12 t_\beta | TT_3\rangle\langle \tfrac12 t_\gamma \tfrac12 t_\delta | TT_3\rangle \cdot$$
$$\cdot 2\,\delta_{j_\gamma j_\alpha}\,\delta_{j_\delta j_\beta}\cdot\delta_{m_\gamma m_\alpha}\cdot\delta_{m_\delta m_\beta}\left(\delta_{t_\gamma t_\alpha} - t^{(j_\alpha)}_{t_\gamma t_\alpha}\right)\left(\delta_{t_\delta t_\beta} - t^{(j_\beta)}_{t_\delta t_\beta}\right)$$

$$1.T. = 2\sum_{\substack{j_\alpha j_\beta\\ t_\alpha t_\beta\\ t_\gamma t_\delta\\ JTT_3}} V_A(j_\alpha j_\beta j_\alpha j_\beta JT)(2J+1)\underbrace{\langle \tfrac12 t_\alpha \tfrac12 t_\beta | TT_3\rangle\langle \tfrac12 t_\gamma \tfrac12 t_\delta | TT_3\rangle}_{I \text{ und Summation}}\Big(\delta_{t_\gamma t_\alpha}\delta_{t_\delta t_\beta} \underbrace{-\delta_{t_\gamma t_\alpha} t^{(j_\beta)}_{t_\delta t_\beta}}_{II\ u.S.} \underbrace{-t^{(j_\alpha)}_{t_\gamma t_\alpha}\delta_{t_\delta t_\beta}}_{III\ u.S.} + \underbrace{t^{(j_\alpha)}_{t_\gamma t_\alpha} t^{(j_\beta)}_{t_\delta t_\beta}}_{IV\ u.S.}\Big)$$

$$I. = \sum_{t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta T_3}\langle \tfrac12 t_\alpha \tfrac12 t_\beta | TT_3\rangle\langle \tfrac12 t_\gamma \tfrac12 t_\delta | TT_3\rangle\delta_{t_\gamma t_\alpha}\delta_{t_\delta t_\beta} = (2T+1)$$

$$II. = -\sum_{t_\alpha t_\beta t_\delta T_3}\langle \tfrac12 t_\alpha \tfrac12 t_\beta | TT_3\rangle\langle \tfrac12 t_\alpha \tfrac12 t_\delta | TT_3\rangle t^{(j_\beta)}_{t_\delta t_\beta} = -(2T+1)\frac{a_{j_\beta}}{c_{j_\beta}} \qquad III. = -(2T+1)\frac{a_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}$$

$$IV. = \sum_{t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta T_3}\langle \tfrac12 t_\alpha \tfrac12 t_\beta | TT_3\rangle\langle \tfrac12 t_\gamma \tfrac12 t_\delta | TT_3\rangle t^{(j_\alpha)}_{t_\gamma t_\alpha} t^{(j_\beta)}_{t_\delta t_\beta} = \underbrace{\frac{a_{j_\alpha}a_{j_\beta}}{c_{j_\alpha}c_{j_\beta}}}_{T_3=1} + \underbrace{\frac{a_{j_\alpha}a_{j_\beta}}{c_{j_\alpha}c_{j_\beta}}}_{T_3=-1} + \underbrace{\tfrac12\left(\frac{a_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\frac{a_{j_\beta}}{c_{j_\beta}}2 - 2(-)^{1-T}\frac{b_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\frac{b_{j_\beta}}{c_{j_\beta}}\right)}_{T_3=0}$$

$$\langle \tfrac12 \tfrac12 \tfrac12 -\tfrac12 | T0\rangle = \sqrt{2}^{-1}$$
$$\langle \tfrac12 -\tfrac12 \tfrac12 \tfrac12 | T0\rangle = (-)^{1-T}\sqrt{2}^{-1}$$
$$= (2T+1)\frac{a_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\frac{a_{j_\beta}}{c_{j_\beta}} + (-)^T\frac{b_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\frac{b_{j_\beta}}{c_{j_\beta}}$$

$$1.T. = 2\sum_{\substack{j_\alpha j_\beta\\ JT}} V_A(j_\alpha j_\beta j_\alpha j_\beta JT)(2J+1)\left\{(2T+1)\left(1-\frac{a_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\right)\left(1-\frac{a_{j_\beta}}{c_{j_\beta}}\right) + (-)^T\frac{b_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\frac{b_{j_\beta}}{c_{j_\beta}}\right\}$$

$$2.T. = \sum_{\substack{j_\gamma j_\delta m_\gamma s_\gamma t_\gamma\\ JMTT_3}} V_A(j_\alpha j_\beta j_\gamma j_\delta JT)\langle j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM\rangle\langle j_\gamma m_\gamma j_\delta m_\delta | JM\rangle\langle \tfrac12 t_\alpha \tfrac12 t_\beta | TT_3\rangle\langle \tfrac12 t_\gamma \tfrac12 t_\delta | TT_3\rangle \cdot$$
$$\cdot\,\delta_{j_\gamma j_\delta}\,\delta_{m_{j_\gamma} - m_{j_\delta}\, s_{j_\gamma} m_\gamma}\left(\delta_{t_\gamma t_\delta} - \bar{t}^{(j_\gamma)}_{t_\gamma t_\delta}\right)\frac{1}{v_{j_\gamma}/u_{j_\gamma}}\,\delta_{j_\beta j_\alpha}\,\delta_{m_{j_\beta} - m_{j_\alpha}\, s_{j_\beta} - m_{j_\beta}}\,\bar{\bar{t}}^{(j_\beta)}_{t_\beta t_\alpha}\,\frac{v_{j_\beta}}{u_{j_\beta}}$$

mit $f(J, j_\alpha j_\beta) := \sum_{m_\alpha m_\gamma}\langle j_\alpha m_\alpha j_\alpha - m_\alpha | J\,0\rangle\langle j_\gamma m_\gamma j_\gamma - m_\gamma | J\,0\rangle\, s_{j_\gamma m_{j_\gamma}}\, s_{j_\alpha m_{j_\alpha}}$

$$2.T. = \sum_{\substack{j_\alpha j_\gamma\\ JTT_3\\ t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta}} V_A(j_\alpha j_\alpha j_\gamma j_\gamma JT)\, f(J, j_\alpha, j_\gamma)\,\frac{v_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\frac{c_{j_\gamma}}{v_{j_\gamma}}\frac{1}{u_{j_\gamma}}\underbrace{\langle \tfrac12 t_\alpha \tfrac12 t_\beta | TT_3\rangle\langle \tfrac12 t_\gamma \tfrac12 t_\delta | TT_3\rangle\left(\delta_{t_\gamma t_\delta}\bar{\bar{t}}^{(j_\alpha)}_{t_\beta t_\alpha} - \bar{\bar{t}}^{(j_\gamma)}_{t_\gamma t_\delta}\bar{\bar{t}}^{(j_\alpha)}_{t_\beta t_\alpha}\right)}_{I.T.\qquad\qquad II.T.}$$

$$I. = \sum_{t_\alpha t_\beta t_\delta t_\delta T_3}\langle \tfrac12 t_\alpha \tfrac12 t_\beta | TT_3\rangle\langle \tfrac12 t_\gamma \tfrac12 t_\delta | TT_3\rangle\delta_{t_\gamma - t_\delta}\bar{\bar{t}}^{(j_\alpha)}_{t_\beta t_\alpha} = \frac{a_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\,\tfrac12\left(1+(-)^{1-T}\right)^2 = \frac{a_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\,2T$$

$$II. = -\sum_{t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta}\langle \tfrac12 t_\alpha \tfrac12 t_\beta | TT_3\rangle\langle \tfrac12 t_\gamma \tfrac12 t_\delta | TT_3\rangle\,\bar{t}^{(j_\gamma)}_{t_\gamma t_\delta}\,\bar{\bar{t}}^{(j_\gamma)}_{t_\beta t_\alpha}\,\bar{\bar{t}}^{(j_\alpha)}_{t_\gamma t_\alpha} = -\Big(\underbrace{-\frac{b_{j_\gamma}}{c_{j_\gamma}}\frac{b_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}}_{T_3=-1+T_3=+1}2 + \underbrace{\tfrac12\frac{a_{j_\gamma}}{c_{j_\gamma}}\frac{a_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}} + \tfrac12(-)^{1-T}\frac{a_{j_\gamma}}{c_{j_\gamma}}\frac{a_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}}_{T_3=0}\Big)$$

$$2.T. = 2\sum_{j_\alpha j_\gamma J} V_A(j_\alpha j_\alpha j_\gamma j_\gamma JT=1)\, f(J, j_\alpha, j_\gamma)\,\frac{v_{j_\alpha}}{u_{j_\alpha}}\Big/\frac{v_{j_\gamma}}{u_{j_\gamma}}\left(\frac{a_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}} - \frac{a_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\frac{a_{j_\gamma}}{c_{j_\gamma}} + \frac{b_{j_\alpha}}{c_{j_\alpha}}\frac{b_{j_\gamma}}{c_{j_\gamma}}\right)$$

Da bei der Berechnung der Matrixelemente die antisymmetrisierten und normierten berechnet werden,

$$V_{AN}(j_\alpha j_\beta j_\gamma j_\delta JT) = \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{j_\alpha j_\beta}}\sqrt{1+\delta_{j_\gamma j_\delta}}}\, V_A(j_\alpha j_\beta j_\gamma j_\delta\, JT)\ ,$$

wo j_α für $n_\alpha, l_\alpha, j_\alpha$ steht, muß $V_A(j_\alpha j_\beta j_\gamma j_\delta JT)$ durch $\sqrt{1+\delta_{j_\alpha j_\beta}}\sqrt{1+\delta_{j_\gamma j_\delta}}\, V_{AN}^{(j_\alpha j_\beta j_\gamma j_\delta JT)}$ ersetzt werden. Damit wird Epp:

$$E_{pp} = 2\sum_{j_\alpha} \varepsilon_{j_\alpha}(2j_\alpha+1)\left(1-\frac{\int\langle\rangle \frac{a_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}}{\int\langle\rangle}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j_\alpha j_\beta}\sum_{J=|j_\alpha-j_\beta|}^{j_\alpha+j_\beta}\sum_{T=0,1}(1+\delta_{j_\alpha j_\beta})V_{AN}^{(j_\alpha j_\beta j_\alpha j_\beta JT)}(2J+1)\Big[(2T+1)\Big\{1+\frac{1}{(\int\langle\rangle)}\int\langle\rangle\Big(-\frac{a_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}-\frac{a_{j\beta}}{c_{j\beta}}+\frac{a_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}\frac{a_{j\beta}}{c_{j\beta}}\Big)\Big\}+$$

$$+(-)^T\frac{1}{(\int\langle\rangle)}\int\langle\rangle\frac{b_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}\frac{b_{j\beta}}{c_{j\beta}}\Big] \qquad (A.9)$$

$$+\sum_{j_\alpha j_\beta}\sum_{J=|j_\alpha-j_\beta|}^{j_\alpha+j_\beta}V_{AN}^{(j_\alpha j_\alpha j_\beta j_\beta J1)}\frac{v_{j\alpha}}{u_{j\alpha}}\Big/\frac{v_{j\beta}}{u_{j\beta}}\,f(J,j_\alpha j_\beta)\frac{1}{(\int\langle\rangle)}\int\langle\rangle\Big(\frac{a_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}-\frac{a_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}\frac{a_{j\beta}}{c_{j\beta}}+\frac{b_{j\alpha}}{c_{j\alpha}}\frac{b_{j\beta}}{c_{j\beta}}\Big)\,.$$

Die Integrationen können analytisch durchgeführt werden.

Mit $\det(1+M)=\prod_{\alpha=1}^{S} c_{j\alpha}^{(2j_\alpha+1)}$ (S = Zahl der Schalen) und $a_{j\alpha}=1+e^{-2i\varphi}\frac{v_{j\alpha}^2}{u_{j\alpha}^2}x$, $b_{j\alpha}=e^{-2i\varphi}\frac{v_{j\alpha}^2}{u_{j\alpha}^2}\sqrt{1-x^2}$, $c_{j\alpha}=a_{j\alpha}^2+c_{j\alpha}^2$ ergibt sich:

$$\int\langle\rangle=-\int_{x=1}^{-1}dx\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\,e^{in\varphi}\prod_{\alpha=1}^{S}\left(1+e^{-4i\varphi}\left(\frac{v_{j\alpha}}{u_{j\alpha}}\right)^4+2e^{-2i\varphi}\left(\frac{v_{j\alpha}}{u_{j\alpha}}\right)^2x\right)^{\frac{1}{2}(2j_\alpha+1)}$$

$$\int\langle\rangle=\sum_{\nu_1=0}^{\frac{1}{2}(2j_1+1)}\cdots\sum_{\nu_S=0}^{\frac{1}{2}(2j_S+1)}\sum_{\underbrace{\varkappa_1=0}_{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_S=\text{gerade}}}^{\nu_1}\cdots\sum_{\varkappa_S=0}^{\nu_S}\binom{\frac{1}{2}(2j_1+1)}{\nu_1}\cdots\binom{\frac{1}{2}(2j_S+1)}{\nu_S}\binom{\nu_1}{\varkappa_1}\cdots\binom{\nu_S}{\varkappa_S}\frac{2^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_S+1}}{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_S+1}\left(\frac{v_{j1}}{u_{j1}}\right)^{4\nu_1-2\varkappa_1}\cdots\left(\frac{v_{jS}}{u_{jS}}\right)^{4\nu_S-2\varkappa_S}\cdot\delta_{n,4(\nu_1+\cdots+\nu_S)-2(\varkappa_1+\cdots+\varkappa_S)}$$

Mit der Definition einer neuen Funktion $J(\cdots j_\lambda{-}1\cdots,a,b_\varepsilon;n)$ lassen sich alle Integrationen mit dieser Funktion angeben.

$$J(\cdots j_\lambda{-}1\cdots,a,b_\varepsilon,n)=$$

$$\sum_{\nu_1=0}^{\frac{1}{2}(2j_1+1)}\cdots\sum_{\nu_\lambda=0}^{\frac{1}{2}(2j_\lambda-1)}\cdots\sum_{\nu_S=0}^{\frac{1}{2}(2j_S+1)}\sum_{\underbrace{\varkappa_1=0}_{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_S+a=\text{gerade}}}^{\nu_1}\cdots\sum_{\varkappa_S=0}^{\nu_S}\binom{\frac{1}{2}(2j_1+1)}{\nu_1}\cdots\binom{\frac{1}{2}(2j_\lambda-1)}{\nu_\lambda}\cdots\binom{\frac{1}{2}(2j_S+1)}{\nu_S}\binom{\nu_1}{\varkappa_1}\cdots\binom{\nu_S}{\varkappa_S}\frac{2^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_S}}{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_S+1+a}\left(\frac{v_{j1}}{u_{j1}}\right)^{4\nu_1-2\varkappa_1}\cdots\left(\frac{v_{j\varepsilon}}{u_{j\varepsilon}}\right)^{4\nu_\varepsilon-2\varkappa_\varepsilon+b_\varepsilon}\cdots\left(\frac{v_{jS}}{u_{jS}}\right)^{4\nu_S-2\varkappa_S}\cdot \qquad (A.10)$$

$$\cdot\,\delta_{n,4(\nu_1+\cdots+\nu_S)-2(\varkappa_1+\cdots+\varkappa_S)}$$

$$\int\langle\rangle = J(\cdots,a=0,b=0,n)$$

$$\int\langle\rangle\frac{a_{j\varphi}}{c_{j\varphi}}=J(\cdots j_\varphi{-}1\cdots,a=0,b=0,n)+J(\cdots j_\varphi{-}1\cdots,a=1,b_\varphi=1,n-2)$$

$$\int\langle\rangle\frac{a_{j\varphi}}{c_{j\varphi}}\frac{a_{j\vartheta}}{c_{j\vartheta}}=J(\cdots j_\varphi{-}1\cdots j_\vartheta{-}1\cdots,a=0,b=0,n)+J(\cdots j_\varphi{-}1\cdots j_\vartheta{-}1,a=1,b_\varphi=2,n-2) \qquad (A.11)$$

$$+J(\cdots j_\varphi{-}1\cdots j_\vartheta{-}1\cdots,a=1,b_\vartheta=2,n-2)+J(\cdots j_\varphi{-}1\cdots j_\vartheta{-}1\cdots,a=2,b_\varphi=2,b_\vartheta=2,n-4)$$

$$\int\langle\rangle\frac{b_{j\varphi}}{c_{j\varphi}}\frac{b_{j\vartheta}}{c_{j\vartheta}}=J(\cdots j_\varphi{-}1\cdots j_\vartheta{-}1\cdots;a=0,b_\varphi=2,b_\vartheta=2,n-4)-J(\cdots j_\varphi{-}1\cdots j_\vartheta{-}1\cdots;a=2,b_\varphi=2,b_\vartheta=2,n-4)$$

Der absolute Normierungsfaktor beträgt:

$$\langle BCS|P_n P_{T=0} P_n P_{T=0}|BCS\rangle=\prod_j u^{2j+1}J(\cdots,a=0,b=0,n)\,. \qquad (A.12)$$

Epp ist die BCS-Grundzustandsenergie, da der Neutronen-Protonen-BCS-Zustand nur eine Näherung des Grundzustandes ist.

Anhang B

Berechnung des Nichtdiagonalelementes $\langle q|H|Q\rangle$

$\langle q|$ = Quadrupelzustand , $|Q\rangle$ = Quartettzustand, 1Schale

$\langle q|H|Q\rangle = \langle BCS(J=0)|H|A(n,T)|0\rangle N_Q N_q$; N = Normierungfaktoren

$$\langle A|H|BCS\rangle = \frac{1}{4}\sum_{m's,t's} V_{A m_\alpha t_\alpha m_\beta t_\beta, m_\gamma t_\gamma m_\delta t_\delta} \langle A|C^+_{m_\alpha t_\alpha} C^+_{m_\beta t_\beta} C_{m_\delta t_\delta} C_{m_\gamma t_\gamma}|BCS\rangle$$

Mit der Exponentialform des BCS-Zustandes für eine Schale aus Anhang A

$$|BCS\rangle = u^{2j+1} e^{\frac{1}{2}\sum_{m't,m''t''} f_{mt,m't'} C^+_{mt} C^+_{m't'}}|0\rangle \text{ mit } f_{mt,m't'} = \frac{v}{u}\delta_{m,-m'} S_{jm}\delta_{t,-t'}$$

und der Vertauschungsrelation (3.13) aus Ref. 20.)

$$[C_\alpha, e^{\frac{1}{2}\sum_{\alpha'\beta'} F_{\alpha'\beta'}(\delta',\theta) C^+_{\alpha'} C^+_{\beta'}}] = \sum_\gamma F_{\alpha\gamma}(\delta',\theta) C^+_\gamma e^{\frac{1}{2}\sum_{\alpha'\beta'} F_{\alpha'\beta'}(\delta',\theta) C^+_{\alpha'} C^+_{\beta'}}$$

erhält man ($|BCS\rangle = u^{2j+1/2}|\overline{BCS}\rangle$):

$$\langle A|H|BCS\rangle = \frac{1}{4}u^{2j+1}\sum_{m's t's} V_{A m_\alpha t_\alpha m_\beta t_\beta m_\gamma t_\gamma m_\delta t_\delta}\Big(f_{m_\gamma t_\gamma m_\delta t_\delta}\langle A|C^+_{m_\alpha t_\alpha} C^+_{m_\beta t_\beta}|\overline{BCS}\rangle - \sum_{\substack{m_\lambda t_\lambda \\ m_\Omega t_\Omega}} f_{m_\gamma t_\gamma m_\lambda t_\lambda} f_{m_\delta t_\delta m_\Omega t_\Omega}\langle A|C^+_{m_\alpha t_\alpha} C^+_{m_\beta t_\beta} C^+_{m_\lambda t_\lambda} C^+_{m_\Omega t_\Omega}|\overline{BCS}\rangle\Big)$$

$$1.T. = \sum_{m's t's} V_{A m_\alpha t_\alpha m_\beta t_\beta m_\gamma t_\gamma m_\delta t_\delta}\frac{v}{u}\delta_{m_\gamma,-m_\delta} S_{m_\gamma}\delta_{t_\gamma,-t_\delta}\langle A|C^+_{m_\alpha t_\alpha} C^+_{m_\beta t_\beta}|\overline{BCS}\rangle$$

$$= \frac{v}{u}\sum_{\substack{m_\alpha t_\alpha \\ m_\beta t_\beta \\ m_\gamma t_\gamma}} V_{A m_\alpha t_\alpha m_\beta t_\beta m_\gamma t_\gamma - m_\gamma - t_\gamma} S_{m_\gamma}\underbrace{\langle A|C^+_{m_\alpha t_\alpha} C^+_{m_\beta t_\beta}|\overline{BCS}\rangle}_{\text{zum Beispiel für } j=3/2 \text{ und } n=4}$$

$$\langle 0|C_{-3/2,-1/2} C_{3/2,1/2} C_{3/2,-1/2} C_{-3/2,1/2} C^+_{m_\alpha t_\alpha} C^+_{m_\beta t_\beta}(1+\tfrac{v}{u}C^+_{3/2,1/2} C_{-3/2,-1/2})(1+\tfrac{v}{u}C^+_{3/2,1/2} C^+_{3/2,-1/2})|0\rangle$$

$$= \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{m_\gamma t_\gamma}\sum_{\substack{m_\alpha \geq j-\frac{n}{4}+1 \\ m_\alpha \leq -j+\frac{n}{4}-1}} 2\, V_{A m_\alpha 1/2 - m_\alpha - 1/2 m_\gamma t_\gamma - m_\gamma - t_\gamma} S_{m_\gamma} S_{m_\alpha}$$

$$2.T = \sum_{\substack{m_\alpha t_\alpha \\ m_\beta t_\beta \\ m_\gamma t_\gamma \\ m_\delta t_\delta \\ m_\lambda t_\lambda \\ m_\Omega t_\Omega}} V_{A m_\alpha t_\alpha m_\beta t_\beta m_\gamma t_\gamma m_\delta t_\delta}\frac{v}{u}\delta_{m_\gamma,-m_\lambda} S_{m_\gamma}\delta_{t_\gamma,-t_\lambda}\frac{v}{u}\delta_{m_\delta,-m_\Omega} S_{m_\delta}\delta_{t_\delta,-t_\Omega}\langle A|C^+_{m_\alpha t_\alpha} C^+_{m_\beta t_\beta} C^+_{m_\lambda t_\lambda} C^+_{m_\Omega t_\Omega}|\overline{BCS}\rangle$$

$$= \left(\frac{v}{u}\right)^2\sum_{\substack{m_\alpha t_\alpha \\ m_\beta t_\beta \\ m_\gamma t_\gamma \\ m_\delta t_\delta}} V_{A m_\alpha t_\alpha m_\beta t_\beta - m_\gamma - t_\gamma - m_\delta - t_\delta} S_{m_\gamma} S_{m_\delta}\langle A|C^+_{m_\alpha t_\alpha} C^+_{m_\beta t_\beta} C^+_{m_\gamma t_\gamma} C^+_{m_\delta t_\delta}|\overline{BCS}\rangle \quad ;$$

mit etwas Überlegung ergibt sich

$$\langle A|H|BCS\rangle = u^{2j+1}\left(\frac{V}{u}\right)^{\frac{n}{2}}\Big[\sum_{m_\gamma t_\gamma}\sum_{|m_\alpha|\geq j-\frac{n}{4}+1}\tfrac{1}{2}V_A{}^{m_\alpha\frac12 -m_\alpha -\frac12\, m_\gamma t_\gamma -m_\gamma -t_\gamma}\, s_{m_\gamma}\, s_{m_\alpha}$$

$$+\sum_{\substack{|m_\alpha|\geq j-\frac{n}{4}+1\\ |m_\gamma|\geq j-\frac{n}{4}+1\\ m_\alpha\neq m_\gamma}}\Big\{-V_A{}^{m_\alpha\frac12 -m_\alpha -\frac12\, m_\gamma\frac12 -m_\gamma -\frac12}\, s_{m_\alpha}\, s_{m_\gamma}+\overbrace{\tfrac12 V_A{}^{m_\alpha\frac12 -m_\gamma -\frac12\, m_\alpha\frac12 -m_\gamma -\frac12}}+\tfrac12 V_A{}^{m_\gamma\frac12 -m_\alpha -\frac12\, m_\gamma\frac12 -m_\alpha -\frac12}$$

$$+\tfrac12 V_A{}^{m_\alpha\frac12\, m_\gamma\frac12\, m_\alpha\frac12\, m_\gamma\frac12}+\tfrac12 V_{-m_\alpha -\frac12 -m_\gamma -\frac12 -m_\alpha -\frac12 -m_\gamma -\frac12}\Big\}\Big]\,.$$

Durch Einsetzen der Invarianzeigenschaften von $V_{A\alpha\beta\gamma\delta}$,

$$V_{A\alpha\beta\gamma\delta}=\sum_{\substack{JM\\ TT_3}} V_A(j,JT)\langle jm_\alpha jm_\beta|JM\rangle\langle jm_\gamma jm_\delta|JM\rangle\langle\tfrac12 t_\alpha\tfrac12 t_\beta|TT_3\rangle\langle\tfrac12 t_\gamma\tfrac12 t_\delta|TT_3\rangle\,,$$

erhält man schließlich:

$$\langle A|H|BCS\rangle = u^{2j+1}\left(\frac{V}{u}\right)^{\frac{n}{2}}\tfrac12\sum_{\substack{JM\\ TT_3}} V_A(j,JT)\Big[\sum_{\substack{m_r\\ m_\alpha\geq j-\frac{n}{4}+1}}\langle jm_\alpha j-m_\alpha|JM\rangle\langle jm_\gamma j-m_\gamma|JM\rangle s_{m_\alpha}s_{m_\gamma}\sum_{t_r}\underbrace{\langle\tfrac12\tfrac12\tfrac12-\tfrac12|T0\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}^{T-1}}}\underbrace{\langle\tfrac12 t_r\tfrac12-t_r|T0\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}^{T-1}}\,+\,(-)^{1-T}\frac{1}{\sqrt{2}^{T-1}}}$$

$$+\sum_{\substack{|m_\alpha|\geq j-\frac{n}{4}+1\\ |m_\gamma|\geq j-\frac{n}{4}+1\\ m_\alpha\neq m_\gamma}}\Big\{-2\langle jm_\alpha j-m_\alpha|JM\rangle\langle jm_\gamma j-m_\gamma|JM\rangle s_{m_\alpha}s_{m_\gamma}\underbrace{\langle\tfrac12\tfrac12\tfrac12-\tfrac12|TT_3\rangle\langle\tfrac12\tfrac12\tfrac12-\tfrac12|TT_3\rangle}_{1/2}$$

$$+2\langle jm_\alpha j-m_\gamma|JM\rangle\langle jm_\alpha j-m_\gamma|JM\rangle\langle\tfrac12\tfrac12\tfrac12-\tfrac12|TT_3\rangle\langle\tfrac12\tfrac12\tfrac12-\tfrac12|TT_3\rangle$$

$$+\underbrace{\langle jm_\alpha jm_\gamma|JM\rangle\langle jm_\alpha jm_\gamma|JM\rangle\langle\tfrac12\tfrac12\tfrac12\tfrac12|TT_3\rangle\langle\tfrac12\tfrac12\tfrac12\tfrac12|TT_3\rangle}_{1}$$

$$+\langle j-m_\alpha\, j-m_\gamma|JM\rangle\langle j-m_\alpha\, j-m_\gamma|JM\rangle\langle\tfrac12-\tfrac12\tfrac12-\tfrac12|TT_3\rangle\times\langle\tfrac12-\tfrac12\tfrac12-\tfrac12|TT_3\rangle\Big\}\Big]\,,$$

mit $V_{AN}=\frac{n}{2}V_A$.

$$\langle A|H|BCS\rangle = u^{2j+1}\left(\frac{V}{u}\right)^{\frac{n}{2}}\Big\{\sum_{\substack{J=0\\ \text{ger}}}^{2j-1}V_{AN}^{(j,J1)}\sum_{m_\gamma=-j}^{+j}\sum_{|m_\alpha|\geq j-\frac{n}{4}+1}\langle jm_\alpha j-m_\alpha|J0\rangle\langle jm_\gamma j-m_\gamma|J0\rangle(-)^{j-m_\alpha}(-)^{j-m_\gamma}$$

$$-\sum_{\substack{J=0\\ T=0,1}}^{2j}V_{AN}^{(j,JT)}\sum_{\substack{|m_\alpha|\geq j-\frac{n}{4}+1\\ |m_\gamma|\geq j-\frac{n}{4}+1\\ m_\alpha\neq m_\gamma}}\langle jm_\alpha j-m_\alpha|J0\rangle\langle jm_\gamma j-m_\gamma|J0\rangle(-)^{j-m_\alpha}(-)^{j-m_\gamma}$$

$$+\sum_{\substack{J=0\\ T=0,1}}^{2j}\sum_{M=-J}^{J}V_{AN}^{(j,JT)}\sum_{\substack{|m_\alpha|\geq j-\frac{n}{4}+1\\ |m_\gamma|\geq j-\frac{n}{4}+1\\ m_\alpha\neq m_\gamma}}\langle jm_\alpha j-m_\gamma|JM\rangle^2$$

$$+2\sum_{\substack{J=0\\ \text{ger.}}}^{2j-1}\sum_{M=-J}^{+J}V_{AN}^{(j,J,T=1)}\sum_{\substack{|m_\alpha|\geq j-\frac{n}{4}+1\\ |m_\gamma|\geq j-\frac{n}{4}+1\\ m_\alpha\neq m_\gamma}}\langle jm_\alpha jm_\gamma|JM\rangle^2\Big\}\,.$$

$$\langle Q|H|q\rangle=\frac{\langle A|H|BCS\rangle}{\sqrt{\langle A|P_J^2|A\rangle\langle BCS|P_n^2P_{T=0}^2|BCS\rangle}}\;;\;\langle Q|q\rangle=\frac{u^{2j+1}\left(\frac{V}{u}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\langle A|P_J^2|A\rangle\langle BCS|P_n^2P_{T=0}^2|BCS\rangle}}$$

Anhang C

Formel für die Berechnung des antisymmetrisierten und normierten Matrixelementes $V_{AN}(j_1 j_2 j_3 j_4 JT)$

Das verwendete Potential hat die folgende Form:

$$V(1,2) = e^{-\frac{2r_{12}^2}{\mu^2}} \sum_{S,T=0,1} A_{ST}\, P_S\, P_T \quad , \quad r_{12} = \tfrac{1}{12}|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 .$$

$$\langle n_1 \ell_1 j_1 n_2 \ell_2 j_2 JMTT_3 | V(1,2) | n_3 \ell_3 j_3 n_4 \ell_4 j_4 JMTT_3 \rangle_{AN} =$$

$$V_0 \sum_{\substack{nn' \\ \ell N \\ L\bar{L}}} \underbrace{\langle n\ell, N\bar{L}L | n_1\ell_1 n_2\ell_2 L\rangle \langle n'\ell, N\bar{L}L | n_3\ell_3 n_4\ell_4 L\rangle}_{\text{Transformation Brackets (M. Moshinsky)}} \mathcal{M}^{\ell(\mu)}_{nn'} \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)(2j_4+1)}\,(2L+1) \cdot$$

$$\cdot \Big\{ A_{00}\,\delta_{T,0} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ \ell_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ L & 0 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_3 & \frac{1}{2} & j_3 \\ \ell_4 & \frac{1}{2} & j_4 \\ L & 0 & J \end{Bmatrix} (1-(-)^{\ell}) + A_{11}\,3 \begin{Bmatrix} \ell_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ \ell_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ L & 1 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_3 & \frac{1}{2} & j_3 \\ \ell_4 & \frac{1}{2} & j_4 \\ L & 1 & J \end{Bmatrix} \delta_{T,1} (1-(-)^{\ell}) +$$

$$A_{10} \cdot 3\delta_{T,0} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ \ell_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ L & 1 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_3 & \frac{1}{2} & j_3 \\ \ell_4 & \frac{1}{2} & j_4 \\ L & 1 & J \end{Bmatrix} (1+(-)^{\ell} + A_{01}\,\delta_{T,1} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ \ell_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ L & 0 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_3 & \frac{1}{2} & j_3 \\ \ell_4 & \frac{1}{2} & j_4 \\ L & 0 & J \end{Bmatrix} (1+(-)^{\ell} \Big\} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{n_1 n_2}\delta_{\ell_1\ell_2}\delta_{j_1 j_2}}} \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{n_3 n_4}\delta_{\ell_3\ell_4}\delta_{j_3 j_4}}} \quad ,$$

mit $\mathcal{M}^{\ell(\mu)}_{nn'} = \int_{r=0}^{\infty} \mathcal{R}_{n\ell}(r)\, e^{-\frac{2r^2}{\mu^2}}\, \mathcal{R}_{n'\ell}(r)\, r^2 dr =$

$$= \left[\frac{n!\,n'!\,(2n+2\ell+1)!!\,(2n'+2\ell+1)!!}{2^{n+n'}\,\frac{\mu^2+2b^2}{\mu^2}} \right]^{1/2} \sum_{m=0}^{n} \sum_{m'=0}^{n'} \frac{1}{\left(\frac{\mu^2+2b^2}{\mu^2}\right)^{\ell+m+m'+1}} \cdot \frac{(-)^{m+m'}\,(2\ell+2m+2m'+1)!!}{m!\,m'!\,(n-m)!\,(n'-m')!\,(2\ell+2m+1)!!\,(2\ell+2m'+1)!!} .$$

$b = \left[\frac{\hbar}{M\omega}\right]^{1/2}$

M = Nukleonenmasse

ω = Oszillatorfrequenz

Summationsbereiche von $n, n', \ell, N, L, \bar{L}$:

$$\max\{|J-S|, |\ell_1-\ell_2|, |\ell_3-\ell_4|\} \le L \le \min\{J+S, \ell_1+\ell_2, \ell_3+\ell_4\}$$

$$\ell_1+\ell_2 \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \le \ell \le \min\{2n_1+\ell_1+2n_2+\ell_2\,;\, 2n_3+\ell_3+2n_4+\ell_4\}$$

Bedingung an ℓ und $\bar{L}$: $|\bar{L}-\ell| \le L \le \bar{L}+\ell$

$$0 \le n \le 2n_1+\ell_1+2n_2+\ell_2 \quad ; \quad 0 \le n' \le 2n_3+\ell_3+2n_4+\ell_4$$

$$0 \le N \le \min\{2n_1+\ell_1+2n_2+\ell_2\,,\, 2n_3+\ell_3+2n_4+\ell_4\}$$

Auswahlregeln: $(-)^{\bar{L}+\ell} = (-)^{\ell_1+\ell_2} = (-)^{\ell_3+\ell_4}$ und $\begin{cases} 2N+\bar{L}+2n+\ell = 2n_1+\ell_1+2n_2+\ell_2 \\ 2N+\bar{L}+2n'+\ell = 2n_3+\ell_3+2n_4+\ell_4 \end{cases}$

Literaturverzeichnis

J. Eichler und M. Yamamura
Nucl. Phys. A182 (1972) 33

V. Gillet und J. Raynal
Nucl. Phys. A122 (1968) 193
V. Gillet, II Nuclear Rotations in the Stretch Scheme,
in "Ecole d'Eté de Physique Theorique des Houches",
De Witt und Gillet Ed. 1968, Gordon und Breach (Paris)

A. Arima und V. Gillet, Annals of Physics 66 (1971) 117
M. Danos und V. Gillet, Physical Review Letters 17 (1966) 703
J. Raynal, Physics Letters 25B (1967) 173
A. Jaffrin, Nuclear Physics A196 (1972) 577

J. P. Elliot, Proceedings of the International School
of Physics Enrico Fermi Course XXXVI, Seite 152

B. Mottelson, in "Proceedings of the International School
of Physics - Enrico Fermi", Course XV (Academic Press Inc.
New York, 45 (1960))

T. T. S. Kuo und G. E. Brown, Nucl. Phys. A114 (1968) 241,271

K. T. Hecht, Nucl. Phys. A102 (1967) 11

K. Helmers, Nucl. Phys. 23 (1961) 594

J. C. Parikh, Nucl. Phys. 63 (1965) 214

M. Ichimura, Progr. Theor. Phys. 33 (1965) 215;
J. N. Ginocchio, Nucl. Phys. 74 (1964) 321

V. G. Soloviev, Nucl. Phys. 18 (1960) 161

11) B. H. Flowers, Proc. Rutherford Jubilee Int. Conf. Manchester, 1961 (Academic Press, New York), Seite 207

12) B. H. Flowers und S. Szpikowski, Proc. Phys. Soc. 84 (1964) 193; 86 (1965) 672

13) A. de Shalit und J. Talmi, Nuclear Shell Theory, Academic Press, N.Y. 1963

14) M. Jean, Hartree-Bogolynubov Theory and Application to the Neutron-Proton Pairing Problem, in den Proceedings der Sommerschule in Predeal, September 1963, Seite 355-361

15) P. Camiz, A. Covello und M. Jean, Nuovo Cimento 36 (1965)

16) H. R. Kissener und L. Münchow, Phys. Letters 25B (1967) 493

17) B. Banerjee und J. C. Parikh, Phys. Rev. 138 (1965) B303

18) Bouten, Theory of Nucleare Structure, Trieste Lectures 1969, Seite 380

19) R. Beck, H. J. Mang und P. Ring, Z. Physik 231 (1970) 26

20) N. Onishi und S. Yoshida, Nucl. Phys. 80 (1966) 367-376

21) J. Eichler, Four-Particle Correlations in Nuclei, Rudziska Lectures, Hahn-Meitner-Institut, Veröffentlichung HMI-B 125, September 1972, Seite 44

22) P. Camiz, A. Covello und M. Jean, Nuovo Cimento 42B (1966) 199

23) K. H. Bhatt und J. B. McGrory, Phys. Rev. C3 (1971) 2293

Diese Arbeit wurde in der Theoretischen Abteilung
des Sektors Kernphysik am Hahn-Meitner-Institut
für Kernforschung Berlin ausgeführt.

Bei ihrer Anfertigung haben mich D. H. E. Groß,
R. Lipperheide, E. Rutetzki, A. Valentien und
vor allem J. Eichler und S. C. K. Nair unterstützt.

Ihnen sei herzlich gedankt.

L e b e n s l a u f

Am 26.12.1941 wurde ich als Schn des Kunstmalers Edmund Schalow und seiner Ehefrau Gertrud Schalow, geb. Götze, in Berlin geboren.

Von 1947 bis 1957 besuchte ich die 14. Grundschule in Lichterfelde, die 8. Grundschule in Pankow und zuletzt die 4. Oberschule technischen Zweiges in Steglitz.

Da mein Vater 1948 starb, meine Mutter 1949 krank wurde, lebte ich von 1953 bis 1960 im Heim.

Von 1957 bis 1960 erlernte ich den Beruf des Elektromechanikers bei der Firma Siemens. Gleichzeitig besuchte ich abends einen Aufbaulehrgang mit dem Abschluß der Fachschulreife. Bis 1963 studierte ich an der Staatlichen Ingenieurschule Gauß (Fachrichtung Elektrotechnik) und arbeitete anschließend als Entwicklungsingenieur für Funksprechgeräte bei der Firma Robert Bosch Elektronik GmbH.

Um ein Hochschulstudium beginnen zu können, beendete ich zum 1.4.1965 mein Arbeitsverhältnis und bereitete mich auf die Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Hochschulreife vor, die ich am 13.12.1965 mit Erfolg bestand.

Am 14.12.1965 begann ich an der FU Berlin Physik zu studieren, bestand am 15.11.1970 die Diplomprüfung und arbeite jetzt an meiner Doktorarbeit auf dem Gebiet der Kernphysik.